3. Vorlesung – Wiederholung.

Für alle additiven Mengen A, B, C gilt $|A||B+C| \leq |A+B||A+C|$

Lemma (Plünnecke) Seien A, B additive Mengen mit $|A+B| \leq K|A|$.

Dann gibt's $X \subseteq A$ mit

$$|X + nB| \leq K^n |X|$$

für alle $n \in \mathbb{N}_0$. Insbesondere $|nB| \leq K^n |A|$.

Lemma (Ruzsa) Unter obigen Voraussetzung gilt sogar $|mB - nB| \leq K^{m+n}|A|$ für alle $m, n \in \mathbb{N}_0$.

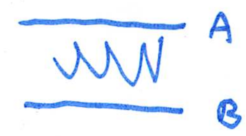
Ziel (Balog, Szemerédi, Gowers) Seien A, B additive Mengen mit $E(A,B) \geq \frac{|A|^{3/2}|B|^{3/2}}{K}$. Dann gibt's $A' \subseteq A$, $B' \subseteq B$ mit

$$|A'| \geq \frac{|A|}{8\sqrt{2}K}, \quad |B'| \geq \frac{|B|}{8K}, \quad |A'+B'| \leq 2^{20} K^8 \sqrt{|A||B|}.$$

Lemma 3.3. Seien A, B additive Mengen mit $E(A,B) \geq \dfrac{|A|^{3/2}|B|^{3/2}}{K}$.

Dann gibt's $R \subseteq A \times B$ mit $|R| \geq \dfrac{|A||B|}{2K}$ und

$$|A \overset{R}{+} B| \leq 2K\sqrt{|A||B|},$$



wobei $$A \overset{R}{+} B = \{a+b : (a,b) \in R\}.$$

Beweis. Wir erinnern uns an

$$\sum_{x \in A+B} r_{A+B}(x) = |A||B| \quad \text{und} \quad \sum_{x \in A+B} r_{A+B}(x)^2 = E(A,B) \geq \frac{|A|^{3/2}|B|^{3/2}}{K}.$$

Setze
$$Q = \left\{ x \in A+B : r_{A+B}(x) \geq \frac{\sqrt{|A||B|}}{2K} \right\}$$

und
$$R = \{(a,b) \in A \times B : a+b \in Q\}.$$

Offenbar $A \overset{R}{+} B = Q$, $\quad |R| = \sum_{x \in Q} r_{A+B}(x)$.

Nun
$$\sum_{x \in (A+B)\setminus Q} r_{A+B}(x)^2 \leq \frac{\sqrt{|A||B|}}{2K} \sum_{x \in (A+B)\setminus Q} r_{A+B}(x) \leq \frac{|A|^{3/2}|B|^{3/2}}{2K}$$

also $$\sum_{x\in Q} r_{A+B}(x)^2 \geq \frac{|A|^{3/2}\,|B|^{3/2}}{2K}.$$

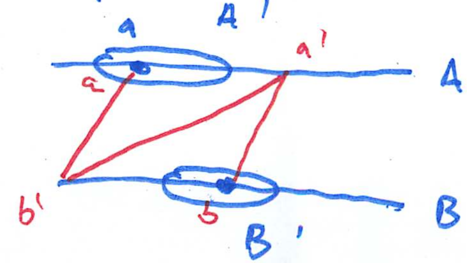
Da $r_{A+B}(x) \leq \min(|A|, |B|) \leq \sqrt{|A|\cdot|B|}$ folgt

$$|R| = \sum_{x\in Q} r_{A+B}(x) \geq \frac{|A||B|}{2K}.$$

Ferner $$|A||B| \geq |R| = \sum_{x\in Q} r_{A+B}(x) \geq \frac{\sqrt{|A||B|}}{2K}\cdot|Q|,$$

also $$2K\sqrt{|A||B|} \geq |Q| = |A \overset{R}{+} B|. \qquad \square$$

<u>Lemma 3.4.</u> Sei (A, B, E) ein bipartiter Graph mit $|E| \geq \delta|A||B|$. Dann gibt's $A' \subseteq A$, $B' \subseteq B$ mit $|A'| \geq \frac{\delta|A|}{4\sqrt{2}}$, $|B'| \geq \frac{\delta|B|}{4}$ mit folgender Eigenschaft: Für alle $a \in A'$, $b \in B'$ gibt's mind $2^{-12}\delta^5|A||B|$ Kantenzüge der Länge 3 von a nach b.



Beweis von Lemma 3.4 $\Rightarrow$ Satz 3.2.

Betrachte zwei additive Mengen A, B mit $E(A,B) \geq \frac{|A|^{3/2}|B|^{3/2}}{K}$.

Nach Lemma 3.3 gibt's $R \subseteq A \times B$ mit $|R| \geq \frac{|A||B|}{2K}$ und

$|A \overset{R}{+} B| \leq 2K\sqrt{|A||B|}$. Setze wieder $Q = |A \overset{R}{+} B|$.

Wende Lemma 3.4 für $\delta = \frac{1}{2K}$ auf R an. Dies liefert $A' \subseteq A$

mit $|A'| \geq \frac{|A|}{8\sqrt{2}K}$ und $B' \subseteq B$ mit $|B'| \geq \frac{|B|}{8K}$ und: Für alle

$(a', b') \in A' \times B'$ gibt's $2^{-17}K^{-5}|A||B|$ Paare $(a,b) \in A \times B$ mit

$(a', b), (a, b), (a, b') \in R$. Wegen

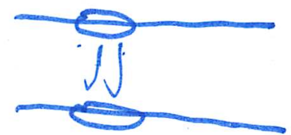
$$a' + b' = (a' + b) - (a + b) + (a + b')$$

folgt: Jede Summe $s \in A' + B'$ kann man auf mind. $2^{-17}K^{-5}|A||B|$

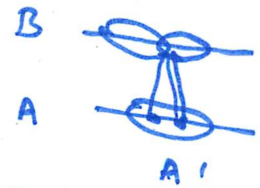
verschiedene Weisen in der Form $x - y + z$ mit $x, y, z \in Q$ schreiben, d.h. $$|A'+B'| \le \frac{|Q|^3}{2^{-17}K^{-5}|A||B|} \le \frac{2^3K^3|A|^{3/2}|B|^{3/2}}{2^{-17}K^{-5}|A||B|}$$

$$= 2^{20}K^8\sqrt{|A||B|}.$$

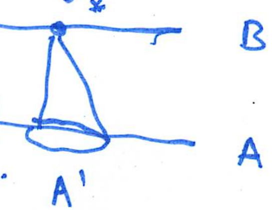
□



Lemma 3.5. Sei (A, B, E) ein bip. Graph mit $|E| \ge \delta |A||B|$. Für jedes $\varepsilon \in (0,1)$ gibt's $A' \subseteq A$ mit $|A'| \ge \frac{\delta |A|}{\sqrt{2}}$ und der Eigenschaft, dass höchstens $\varepsilon |A'|^2$ Paare $(a_1, a_2) \in A'^2$ weniger als $\frac{1}{2}\delta^2\varepsilon |B|$ gemeinsame Nachbarn haben.



Beweis. Wir werden zeigen, dass es eine Ecke $b_* \in B$ gibt, für die $A' = N(b_*)$ diese Eigenschaft hat.



Setze $\Omega = \{(a_1, a_2) \in A^2 : |N(a_1) \cap N(a_2)| < \frac{1}{2}\delta^2\varepsilon |B|\}.$

Doppeltes abzählen: $$\sum_{b \in B} |N(b)^2 \cap \Omega| = \sum_{(a_1,a_2)\in\Omega} |N(a_1)\cap N(a_2)| < \frac{1}{2}\delta^2\varepsilon |B||\Omega|$$

also $$\sum_{b\in B} |N(b)^2 \cap \Omega| \leq \frac{1}{2}\delta^2\varepsilon |A|^2|B|.$$

Andererseits zeigt die CSU

$$|B|\cdot\sum_{b\in B}|N(b)|^2 \geq \Big(\sum_{b\in B}|N(b)|\Big)^2 = |E|^2 \geq \delta^2|A|^2|B|^2,$$

Insgesamt

$$\sum_{b\in B}\left(\varepsilon|N(b)|^2 - |N(b)^2\cap\Omega|\right) \geq \varepsilon\delta^2|A|^2|B| - \frac{1}{2}\varepsilon\delta^2|A|^2|B|$$
$$= \frac{1}{2}\varepsilon\delta^2|A|^2|B|.$$

Also gibt's $b_* \in B$ mit

$$\varepsilon|N(b_*)|^2 - |N(b_*)^2\cap\Omega| \geq \frac{1}{2}\delta^2\varepsilon|A|^2.$$

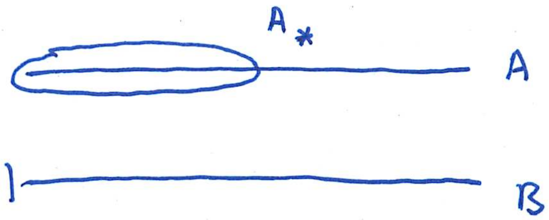
Setze $A' = N(b_*)$. Nun $\varepsilon|N(b_*)|^2 \geq \frac{1}{2}\delta^2\varepsilon|A|^2$, also

$|A'| \geq \frac{\delta|A|}{\sqrt{2}}$ und $|(A')^2\cap\Omega| \leq \varepsilon|A'|^2$. $\square$

Beweis von Lemma 3.4.

Sei (A, B, E) ein bipartiter Graph mit $|E| \geq \delta |A||B|$.

Setze $A_* = \{ a \in A : d(a) \geq \frac{1}{2} \delta |B| \}$.



Wegen $e(A \setminus A_*, B) \leq |A \setminus A_*| \cdot \frac{1}{2} \delta |B| \leq \frac{1}{2} \delta |A||B|$

ist $$e(A_*, B) \geq \frac{1}{2} \delta |A||B|.$$

Insbesondere $A_* \neq \emptyset$. Sei δ_* die Zahl mit $\frac{1}{2} \delta |A| = \delta_* |A_*|$.

Dann $e(A_*, B) \geq \delta_* |A_*||B|$ und $\delta_* \geq \frac{\delta}{2}$. Wende Lemma 3.5 mit $\varepsilon = \frac{\delta}{16}$ auf den bipartiten Teilgraphen zwischen A_* und B an. Dies liefert $A_{**} \subseteq A_*$ mit $|A_{**}| \geq \frac{\delta_* |A_*|}{\sqrt{2}} = \frac{\delta |A|}{2\sqrt{2}}$ und $|A_{**}^2 \cap \Omega| \leq \varepsilon |A_{**}|^2$, wobei

$$\Omega = \{ (a_1, a_2) \in A_{**}^2 : |N(a_1) \cap N(a_2)| \leq \frac{1}{2} \delta_*^2 \varepsilon |B| \}.$$

Setze

$$A' = \{ a \in A_{**} : \text{ Die Anzahl der } a' \in A_{**} \text{ mit } (a, a') \in \Omega \text{ ist kleiner als } 2\varepsilon |A_{**}| \}.$$

Wegen

$$|A_{**} \setminus A'| \cdot 2\varepsilon |A_{**}| \leq |\Omega| \leq \varepsilon |A_{**}|^2$$

ist

$$|A'| \geq \frac{1}{2} |A_{**}| \geq \frac{\delta |A|}{4\sqrt{2}} .$$

Wegen $A_{**} \subseteq A_*$ ist $e(A_{**}, B) \geq \frac{1}{2} \delta |B| \cdot |A_{**}|$.

Setze

$$B' = \{ b \in B : |N(b) \cap A_{**}| \geq \frac{1}{4} \delta |A_{**}| \}.$$

Wie immer ist $e(A_{**}, B') \geq \frac{1}{4} \delta |B| |A_{**}|$, also

$$|B'| \geq \frac{1}{4} \delta |B| .$$

Wir zeigen, dass A', B' wie gewünscht sind: Seien $a \in A'$, $b \in B'$ beliebig.

Es gibt mind $\left(\frac{\delta}{4} - 2\varepsilon\right)|A_{**}|$ Ecken $a' \in A_{**}$ mit $a'b \in E$ und $(a,a') \notin \Omega$. Für jede dieser Ecken gibt's mind $\frac{1}{2}\delta^2\varepsilon|B|$ Ecken $b' \in B$ mit $ab', a'b' \in E$.

Insgesamt gibt's mind.

$$\left(\frac{\delta}{4} - 2\varepsilon\right)|A_{**}| \cdot \frac{1}{2}\delta^2\varepsilon|B|$$

$$\geq \frac{\delta}{2^3} \cdot \frac{\delta|A|}{2^2} \cdot \frac{\delta^3}{2^5}|B|$$

$$= \frac{\delta^5|A||B|}{2^{10}}$$

Kantenzüge der Länge 3 von a nach b. $\square$

Folgerung 3.6. Sei A eine additive Menge mit $E(A) \geq \frac{|A|^3}{K}$.

Dann gibt's $A' \subseteq A$ mit $|A'| \geq \frac{|A|}{8K}$ und $|A' + A'| \leq 2^{44} K^{17} |A|$.

Beweis. Wende Satz 3.2 mit $A = B$ an. Dies liefert

$A', B' \subseteq A$ mit $|A'| \geq \frac{|A|}{8K}$, $|B'| \geq \frac{|B|}{8\sqrt{2}K}$

und $|A' + B'| \leq 2^{20} K^8 |A|$.

Lemma 2.2 impliziert

$$|B'||A' + A'| \leq |A' + B'|^2 \leq 2^{40} K^{16} |A|^2$$

$$\leq 2^{44} K^{17} |A||B'|. \qquad \square$$

Bem 3.7. Tomasz Schoen zeigt: Für alle A mit $E(A) \geq \frac{|A|^3}{K}$

gibt's $A' \subseteq A$ mit $|A'| \geq \frac{|A|}{6K}$ und $|A' + A'| \leq O(K^4 |A|)$.