

2. Vorlesung - Wiederholung

$$\sigma[A] = \frac{|A+A|}{|A|} \quad \text{Verdopplungskonstante}$$

$$\delta[A] = \frac{|A-A|}{|A|} \quad \text{Differenzkonstante}$$

Wir wissen $\delta[A] \leq \sigma[A]^2$ (Beweis mit Russas Δ -Ungleichung
 $|B||A-C| \leq |A-B||B-C|$)

Unser nächstes Ziel ist $\sigma[A] \leq \delta[A]^3$.

Wir wissen bereits $r_{A+B}(x) \leq \frac{|A-B|^2}{|A+B|}$ für alle $x \in A+B$, wobei

$$r_{A+B}(x) = |\{(a,b) \in A \times B : a+b=x\}|.$$

Zudem

$$\sum_{x \in A+B} r_{A+B}(x) = \sum_{x \in A+B} r_{A-B}(x) = |A||B|.$$

Dfn 1.10 Für zwei additive Mengen A, B heißt die Zahl

2

$$E(A, B) = |\{(a, a', b, b') \in A^2 \times B^2 : a + b = a' + b'\}|$$

die additive Energie zwischen A und B .

Offenbar ist

$$E(A, B) = \sum_{x \in A+B} \Gamma_{A+B}(x)^2.$$

Da $a + b = a' + b' \iff a - b' = a' - b$ gilt auch

$$E(A, B) = \sum_{x \in A-B} \Gamma_{A-B}(x)^2.$$

Fakt 1.11. (a) $|A||B| \leq E(A, B) \leq \min(|A||B|^2, |A|^2|B|)$.

$$(b) \quad E(A, B) \geq \frac{|A|^2|B|^2}{|A+B|} \quad \text{und} \quad E(A, B) \geq \frac{|A|^2|B|^2}{|A-B|},$$

3

Beweis. (a) Da (a, a, b, b) ein additives Quadrupel ist (für alle $a \in A, b \in B$) ist $|A||B| \leq E(A, B)$. Da man $a+b = a'+b'$ nach a' oder b' auflösen kann, ist $E(A, B) \leq |A||B|^2, E(A, B) \leq |A|^2|B|$.

(b) $\Leftarrow \Rightarrow$

$$\begin{aligned}
 |A+B| E(A, B) &= |A+B| \sum_{x \in A+B} r_{A+B}(x)^2 \\
 &\geq \left(\sum_{x \in A+B} r_{A+B}(x) \right)^2 = (|A||B|)^2
 \end{aligned}$$

Analog ist auch $|A-B| E(A, B) \geq |A|^2|B|^2$. □

Lemma 1.12. Für alle additiven Mengen A, B gilt $|A||B||A+B| \leq |A-B|^3$.

Beweis. Wähle $x \in A+B$ so, dass $r = r_{A+B}(x)$ maximal. Wir wissen

$$E(A, B) = \sum_{y \in A+B} r_{A+B}(y)^2 \leq r \sum_{y \in A+B} r_{A+B}(y) = r |A||B|,$$

also

$$r \geq \frac{E(A, B)}{|A||B|} \geq \frac{|A||B|}{|A-B|}$$

Lemma 1.8 impliziert $r \leq \frac{|A-B|^2}{|A+B|}$

Also $\frac{|A-B|^2}{|A+B|} \geq \frac{|A||B|}{|A-B|}$, d.h. $|A-B|^3 \geq |A||B||A+B|$. $\square$

Folgerung 1.13. Für jede additive Menge A gilt $\sigma[A] \leq S[A]^3$.

Beweis. Setze $A=B$ in Lemma 1.12 ein. Dann

$$|A|^2 |A+A| \leq |A-A|^3, \text{ d.h. } \frac{|A+A|}{|A|} \leq \left(\frac{|A-A|}{|A|} \right)^3. \quad \square$$

Frage. Wenn $\sigma[A]$ klein ist, muss dann $\frac{|3A|}{|A|} = \frac{|A+A+A|}{|A|}$ auch klein sein?

§ 2. Plünnecke Ungleichungen.

Lemma 2.1. (Petridis). Es seien A, B additive Mengen. Wähle $X \subseteq A$ mit $X \neq \emptyset$ so, dass $\frac{|X+B|}{|X|}$ minimal ist. Dann gilt

$$|X| |X+B+C| \leq |X+B| |X+C|$$

für jede additive Menge C .

Beweis. Induktion nach $|C|$.

$|C|=1$ | Da $|X+B+C| = |X+B|$, $|X+C| = |X|$ gilt sogar Gleichheit.

$C \rightarrow C \cup \{c\}$ | Es gelte

$$|X| |X+B+C| \leq |X+B| |X+C| \dots \dots \dots (1)$$

und es sei $c \notin C$. Setze

$$Y = \{x \in X : x+c \in X+C\}$$

und

6

$$Z = \{ z \in X+B : z+c \in X+B+C \}.$$

Offenbar $Y+B \subseteq Z$. Falls $Y \neq \emptyset$ folgt aus der Wahl von X ,

dass

$$\frac{|X+B|}{|X|} \leq \frac{|Y+B|}{|Y|} \leq \frac{|Z|}{|Y|}, \text{ d.h.}$$

$$|Y| |X+B| \leq |X| |Z|. \quad (2)$$

Das stimmt auch, wenn $Y = \emptyset$. Subtrahiere (2) von $|X| |X+B|$:

$$|X| |(X+B) \setminus Z| \leq |X+B| |X \setminus Y|.$$

Addiere (1):

$$|X| (|X+B+C| + |(X+B) \setminus Z|) \leq |X+B| (|X+C| + |X \setminus Y|)$$

d.h.

$$|X| |X+B+(C \cup \{c\})| \leq |X+B| |X+(C \cup \{c\})|. \quad \square$$

Lemma 2.2. Für je drei additive Mengen A, B, C gilt

7

$$|A| |B+C| \leq |A+B| |A+C|.$$

Beweis. Wähle $X \subseteq A$ mit $X \neq \emptyset$ so, dass $\frac{|X+B|}{|X|}$ minimal.

Nun ist

$$|B+C| \leq |X+B+C| \leq \frac{|X+B|}{|X|} |X+C| \leq \frac{|A+B|}{|A|} |A+C|,$$

also $|A| |B+C| \leq |A+B| |A+C|.$

□

Folgerung 2.3. Für jede additive Menge A gilt $\sigma[A] \leq S[A]^2$.

Beweis. Setze $B = C = -A$ in Lemma 2.2 ein:

$$|A| |A+A| = |A| |-A-A| \leq |A-A|^2.$$

□

Lemma 2.4. (Plünnecke) Seien A, B additive Mengen mit

$|A+B| \leq K|A|$. Dann $|nB| \leq K^n |A|$ für alle $n \in \mathbb{N}_0$.

Beweis. Wähle $X \subseteq A$ mit $X \neq \emptyset$ so, dass $\frac{|X+B|}{|X|}$ minimal.

Wir zeigen durch Induktion nach $n \in \mathbb{N}_0$, dass

$$|X + nB + C| \leq K^n |X + C| \quad \dots \quad (*)$$

für alle additiven Mengen C gilt.

$n=0$ trivial

$n \rightarrow n+1$ Aus Lemma 2.1 folgt

$$\begin{aligned} |X + (n+1)B + C| &= |X + B + (nB + C)| \leq \frac{|X+B|}{|X|} |X + nB + C| \\ &\leq \frac{|A+B|}{|A|} \cdot K^n |X + C| \leq K^{n+1} |X + C|. \end{aligned}$$

Damit ist (*) gezeigt. Für $|C|=1$ folgt

$$|nB| \leq |X + nB| \leq K^n |X| \leq K^n |A|.$$

□

9

Folgerung 2.5. (Ruzsa) Es seien A, B additive Mengen mit $|A+B| \leq K|A|$. Dann $|mB - nB| \leq K^{m+n}|A|$ für alle $m, n \in \mathbb{N}_0$.

Beweis. Nach Beweis von Lemma 2.4 existiert $X \subseteq A$ mit $|X+mB| \leq K^m |X|$, $|X+nB| \leq K^n |X|$.

Wende die Δ -Ungl von Ruzsa auf $mB, nB, -X$ an.

$$|-X| |mB - nB| \leq |X+mB| |X+nB| \leq K^{m+n} |X|^2,$$

also $|mB - nB| \leq K^{m+n} |X| \leq K^{m+n} |A|.$ □

Folgerung 2.6. Für jede additive Menge A und alle $m, n \in \mathbb{N}_0$

gilt $\frac{|mA - nA|}{|A|} \leq \min(\sigma[A]^{m+n}, \delta[A]^{m+n}).$ □

§ 3. Satz von Balog, Szemerédi, Gowers.

10

Defn 3.1. Die Energie einer additiven Menge A ist

$$E(A) = E(A, A) = |\{ (a_1, a_2, a_3, a_4) \in A^4 : a_1 + a_2 = a_3 + a_4 \}|.$$

Fakt 1.11 impliziert

$$|A|^2 \leq E(A) \leq |A|^3, \quad E(A) \geq \frac{|A|^4}{|A+A|}, \quad \frac{|A|^4}{|A-A|}.$$

Wenn also $\sigma[A] \leq K$, dann $E(A) \geq \frac{|A|^3}{K}$.

Gilt das umgekehrt auch?

Gegenbeispiel. $|A| = n$ besteht aus

- arithm. Folge der Länge $n/2$
- $n/2$ willkürlichen Gruppenelementen.

Dann $|A+A| \geq \frac{n^2}{8} = \frac{n}{8} |A|$, also $\sigma[A] \geq \frac{n}{8}$. Aber

$$E(A) \geq E(\text{arithm. Folge der Länge } n/2) \geq \frac{n^3}{48} + O(n^2).$$

Satz 3.2 (Balog, Szemerédi & Gowers)

Seien A, B additive

II

Mengen mit $E(A, B) \geq \frac{|A|^{3/2} |B|^{3/2}}{K}$

Dann existieren $A' \subseteq A$ und $B' \subseteq B$ mit

$$|A'| \geq \frac{|A|}{8\sqrt{2}K}, \quad |B'| \geq \frac{|B|}{8K}, \quad |A' + B'| \leq 2^{20} K^8 \sqrt{|A||B|}.$$