§8. Der Satz von Freiman.

__Satz 8.1.__ Für jede reelle Zahl $K \geq 1$ gibt's positive reelle Zahlen $d(K)$, $s(K)$ mit folgender Eigenschaft: Ist $A \subseteq \mathbb{Z}$ eine additive Menge mit $|A+A| \leq K|A|$, so gibt's eine GAP $P \supseteq A$ vom Rang $\leq d(K)$ mit $|P| \leq s(K) \cdot |A|$.

Insbesondere stimmt dies für

$$d(K) = 2^{(2K)^{33}} \quad \text{und} \quad s(K) = K^4 \cdot 2^{d(K)}.$$

__Beweis.__ Sei $|A+A| \leq K|A|$. Nach Folgerung 5.9 gibt's eine Primzahl $N \leq 32|8A-8A| \leq 32K^{16}|A|$ (Plünnecke!) und Teilmengen $A' \subseteq A$, $B \subseteq \mathbb{Z}/N\mathbb{Z}$ mit $|A'| = |B| \geq \frac{|A|}{8}$, für die $2A'-2A'$ und $2B-2B$ $\mathbb{F}_2$-isomorph sind. Für $\delta = 2^{-8}K^{-16}$ gilt $N\delta \geq |A|/8 \geq |B|$.

Nach Folgerung 6.17 gilt $\mathrm{Bohr}(\Gamma, \frac{1}{4}) \subseteq B$ für eine Menge $\Gamma \subseteq \widehat{\mathbb{Z}/N\mathbb{Z}}$ mit $|\Gamma| \leq \delta^{-2} = 2^{16}K^{32}$. OBdA ist $0 \notin \Gamma$ und $\Gamma \neq \emptyset$.

Nach Satz 7.11 gibt's eine echte GAP $Q' \subseteq \mathrm{Bohr}(\Gamma, \frac{1}{4}) \subseteq 2B-2B$ vom Rang $|\Gamma|$ mit $|Q'| \geq \left(\frac{1}{4|\Gamma|}\right)^{|\Gamma|} N$. Da $\mathbb{F}_2$-Isomorphismen echte GAPs bewahren, existiert auch eine echte GAP $Q \subseteq 2A'-2A' \subseteq 2A-2A$ mit $|Q| \geq \left(\frac{1}{4|\Gamma|}\right)^{|\Gamma|} N$. Nun ist

$$\frac{|Q+A|}{|Q|} \leq \frac{|3A-2A|}{(4|\Gamma|)^{-|\Gamma|} N} \leq \frac{K^5 |A|}{|A|/8} \cdot (4|\Gamma|)^{|\Gamma|} \leq 8K^5 \left(2^{18} K^{32}\right)^{2^{16} K^{32}}$$

$$\leq 2^{3+5K} \cdot 2^{(18+32K)\, 2^{16} K^{32}} \leq 2^{64K \cdot 2^{16} K^{32}} = 2^{2^{22} K^{33}}.$$

Nach Ruzsas Überdeckungssatz existiert eine Menge $X \subseteq Q+A$ mit $|X| \leq \frac{|Q+A|}{|A|}$ und $A \subseteq X + Q - Q$. Dabei ist $Q-Q$ eine GAP vom gleichen Rang wie Q mit $|Q-Q| \leq 2^{|\Gamma|} |Q|$. Schreibt man $X = \{x_1, \ldots, x_{|X|}\}$, so ist $Y = \{k_1 x_1 + \ldots + k_{|X|} x_{|X|} : 0 \leq k_i \leq 1 \text{ für alle } i \in [|X|]\}$ eine GAP vom Rang $|X|$ mit $X \subseteq Y$ und $|Y| \leq 2^{|X|}$.

Insgesamt ist $P = Y + (Q - Q)$ eine GAP mit $A \subseteq P$,

$$\mathrm{rang}(P) \leq |X| + |\Gamma| \leq 2^{2^{22} K^{33}} + 2^{16} K^{32} \leq 2^{16 + 32K + 2^{22} K^{33}}$$

$$\leq 2^{(2K)^{33}} = d(K)$$

und

$$|P| \leq |Y| \cdot |Q - Q| \leq 2^{|X|} \cdot 2^{|\Gamma|} |Q| \leq 2^{|X| + |\Gamma|} |2A - 2A|$$

$$\leq K^4 \, 2^{d(K)} |A| = s(K) \cdot |A|. \qquad \square$$

<u>Lemma 8.2 (Chang)</u> Es seien $K, L \in \mathbb{N}$ und A, B additive Mengen mit $|A + A| \leq K|A|$, $|A + B| \leq L|B|$. Dann gibt's eine Zahl $d \leq 4K(1 + \log_2(KL))$ und eine GAP P vom Rang d mit

$$A \subseteq B - B + P \quad \text{und} \quad |P| \leq 2^d.$$

. . . . . .

<u>Beweis.</u> Sei $A_1, \ldots, A_n \subseteq A$ eine maximale Folge von Teilmengen mit

$$|A_1| = \ldots = |A_n| = 2K \quad \text{und} \quad |A_1 + \ldots + A_n + B| = (2K)^n |B|.$$

(Dabei ist auch $n=0$ erlaubt) Wegen

$$(2K)^n |B| \leq |B + nA| \leq \frac{|B+A|\,|nA+A|}{|A|} \qquad \text{(nach Lemma 2.2)}$$

$$\leq \frac{L|B| \cdot K^{n+1}|A|}{|A|}$$

ist $2^n \leq KL$, d.h. $n \leq \log_2(KL)$. (Insbesondere existiert also n !)

Wähle nun $A_{n+1} \subseteq A$ maximal mit

$$|A_1 + \ldots + A_n + A_{n+1} + B| = (2K)^n |A_{n+1}|\,|B|.$$

Nach Maximalität von n ist $|A_{n+1}| < 2K$. Ist $a \in A$ beliebig, so sind

$$A_1 + \ldots + A_n + A_{n+1} + B \quad \text{und} \quad A_1 + \ldots + A_n + a + B$$

nicht disjunkt, da $A_{n+1} \cup \{a\}$ sonst der Maximalität von A_{n+1} widerspräche.

Dies zeigt

$$A \subseteq (A_1 - A_1) + \dots + (A_n - A_n) + A_{n+1} + (B - B).$$

Nun zähle $x_1, \dots, x_d$ die Elemente von $A_1 - A_1, \dots, A_n - A_n, A_{n+1}$ auf und man setze

$$P = \{ k_1 x_1 + \dots + k_d x_d : 0 \leq k_i \leq 1 \text{ für alle } i \in [d] \}.$$

Offenbar ist P eine GAP vom Rang d mit $|P| \leq 2^d$ und es gilt $A \subseteq (B - B) + P$. Außerdem

$$d < (2n+1) \cdot 2K < 4K(n+1) \leq 4K(1 + \log_2(KL)). \qquad \square$$

<u>Folgerung 8.3.</u> Für $K \in \mathbb{N}$ stimmt der Satz von Freiman auch mit

$$d'(K) = (2K)^{34} \quad \text{und} \quad s'(K) = K^4 \cdot 2^{d'(K)}.$$

<u>Beweis.</u> Es sei $A \subseteq \mathbb{Z}$ eine additive Menge mit $|A+A| \leq K|A|$.

Nach Beweis von Satz 8.1 existiert eine echte GAP $Q \subseteq 2A-2A$ vom Rang $|\Gamma|$ mit

$$\frac{|Q+A|}{|Q|} \leq 2^{2^{22}} K^{33} \,,$$ ~~und~~ wobei $|\Gamma| \leq 2^{16} K^{32}$.

Wir können also Lemma 8.2 auf $Q, 2^{2^{22}} K^{33}$ statt B, L anwenden. Dies liefert eine GAP R vom Rang d mit

$$A \subseteq Q - Q + R \quad \text{und} \quad |R| \leq 2^d,$$

wobei
$$\begin{aligned} d &\leq 4K\left(1+\log_2\left(K \cdot 2^{2^{22}} K^{33}\right)\right) \\ &\leq 4K\left(1+K+2^{22}K^{33}\right) \\ &\leq 4K \cdot 2^{23} K^{33} = 2^{25} K^{34}. \end{aligned}$$

Nun ist $P = Q - Q + R$ eine GAP mit $P \supseteq A$,

$$\operatorname{rang}(P) \leq |\Gamma| + d$$
$$\leq 2^{16} K^{32} + 2^{25} K^{34} \leq (2K)^{34} = d'(K)$$

und

$$|P| \leq |Q - Q| \cdot |R| \leq 2^{|\Gamma|} |Q| \cdot 2^{d}$$
$$\leq 2^{d + |\Gamma|} |2A - 2A| \leq 2^{d'(K)} \cdot K^4 |A| = s'(K) \cdot |A|. \quad \square$$

<u>Bemerkung 8.4.</u> Der aktuelle Weltrekord wurde von Tomasz Schoen erzielt, der den Satz von Freiman mit

$$d''(K) = K \cdot e^{C\sqrt{\log K}} \quad \text{und} \quad s''(K) = K^6 \cdot 2^{d''(K)}$$

bewies. Es wird geglaubt, dass der Satz auch mit

$$d'''(K) = K \quad \text{und} \quad s'''(K) = 2^{C \cdot K}$$

stimmt.

. . . . . .