Diskrete Mathematik – Übungsblatt 12
Sommersemester 2021

Christian Reiher, Kevin Sames

---

1. Die Zahlenfolge $(a_n)_{n\in\mathbb{N}_0}$ sei rekursive durch $a_0 = 1$ und $a_{n+1} = 2a_n + 4^n$ definiert. Man finde eine Formel für die erzeugende Funktion $f(x) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n$ und leite hieraus eine geschlossene Formel für a_n her.

2. Die Zahlenfolge $(b_n)_{n\in\mathbb{N}_0}$ sei rekursive durch $b_0 = 1$, $b_1 = 4$ und $b_{n+2} = 8b_{n+1} - b_n$ definiert.
   (a) Man zeige $b_n = \frac{1}{2}\big((4+\sqrt{15})^n + (4-\sqrt{15})^n\big)$ für alle $n \in \mathbb{N}_0$.
   (b) Man bestimme die ersten 1000 Nachkommastellen von $(4+\sqrt{15})^{2021}$.

3. Es sei n eine positive ganze Zahl. Eine Permutation $\sigma \in S_n$ heiße *gut*, wenn $|\sigma(k) - k| \leqslant 1$ für alle $k \in [n]$ gilt. Man beweise, dass die Anzahl der guten Permutationen die Fibonacci-Zahl F_{n+1} ist. (Dabei ist $F_1 = F_2 = 1$ und $F_{n+2} = F_{n+1} + F_n$).

4. Es sei n eine positive ganze Zahl. Auf einer Kreislinie seien die paarweise verschiedenen Punkte $P_1, \dots, P_{2n}$ gewählt. Man zeige, dass es genau C_n Möglichkeiten gibt, n überschneidungsfreie Sehnen so in den Kreis zu zeichnen, dass die $2n$ Endpunkte der Sehnen die gegebenen Punkte $P_1, \dots, P_{2n}$ sind. Dabei ist $C_n = \frac{1}{n+1}\binom{2n}{n}$ die n^{te} Catalan-Zahl.

Abgabe am Mittwoch, den 7. Juli, 10 Uhr