Diskrete Mathematik – Übungsblatt 10
Sommersemester 2021

Christian Reiher, Kevin Sames

---

1. Zwei projektive Ebenen $(X, \mathscr{L})$ und $(X', \mathscr{L}')$ heißen *isomorph*, wenn es eine Bijektion $\varphi\colon X \longrightarrow X'$ gibt, für die $\mathscr{L}' = \{\varphi[L]\colon L \in \mathscr{L}\}$ gilt.

   Konstruieren Sie einen Isomorphismus zwischen der Fano-Ebene und der zur Fano-Ebene dualen projektiven Ebene.

   Hinweis: Die Fano-Ebene ist die projektive Ebene $F = (X, \mathscr{L})$ mit $X = \{1, 2, 3, 4, 5, 6, 7\}$ und $\mathscr{L} = \big\{\{1, 2, 4\}, \{2, 3, 5\}, \{3, 4, 6\}, \{4, 5, 7\}, \{5, 6, 1\}, \{6, 7, 2\}, \{7, 1, 3\}\big\}$. Die duale projektive Ebene ist durch die Konstruktion in Lemma 9.8 definiert.

2. Es seien $(X, \mathscr{L})$ eine projektive Ebene der Ordnung n und $A \subseteq X$ eine Menge von $n + 3$ Punkten. Man beweise, dass eine Gerade $L \in \mathscr{L}$ mit $|A \cap L| \geqslant 3$ existiert.

3. Konstruieren Sie drei paarweise orthogonale lateinische Quadrate der Ordnung 4.

4. Es sei $F = \{x_1, \dots, x_n\}$ ein endlicher Körper mit n Elementen, wobei $t_1 = 1$ und $t_n = 0$ das Einselement beziehungsweise das Nullelement von F seien. Für $k \in [n-1]$ sei die $n \times n$-Tabelle L_k so definierte, dass für alle $i, j \in [n]$ in der i-ten Zeile und j-ten Spalte von L_k diejenige Zahl $m \in [n]$ steht, für die $x_m = x_i x_k + x_j$ gilt. Man zeige, dass $\{L_1, \dots, L_{n-1}\}$ eine Menge von $n - 1$ paarweise orthogonalen lateinischen Quadraten der Ordnung n ist.

Abgabe am Mittwoch, den 23. Juni, 10 Uhr