9. Vorlesung.

Erinnerung.

Satz (Mantel) $T(n) = \lfloor \frac{n^2}{4} \rfloor$

$\parallel$

maximale Anzahl von Kanten in einem Graphen mit n Ecken, der kein Dreieck enthält.

. . . . . .

Dfn. Es sei F ein Graph und $n \in \mathbb{N}$. Setze dann

$$ex(n, F) = \max \{ |E| : G = (V, E) \text{ ist Graph mit } |V| = n \text{ und } F \nsubseteq G. \}$$

Wir betrachten den Fall $F = K^r$.

Dfn. Für ganze Zahlen $n \geq 0$ und $r \geq 1$ sei $T_r(n)$ der vollständig r-partiten Graphen auf n Ecken, bei dem sich die Größen der Eckenklassen um höchstens 1 unterscheiden.

Es gibt also eine Partition

$$V(T_r(n)) = V_1 \,\dot\cup\, \dots \,\dot\cup\, V_r$$

mit

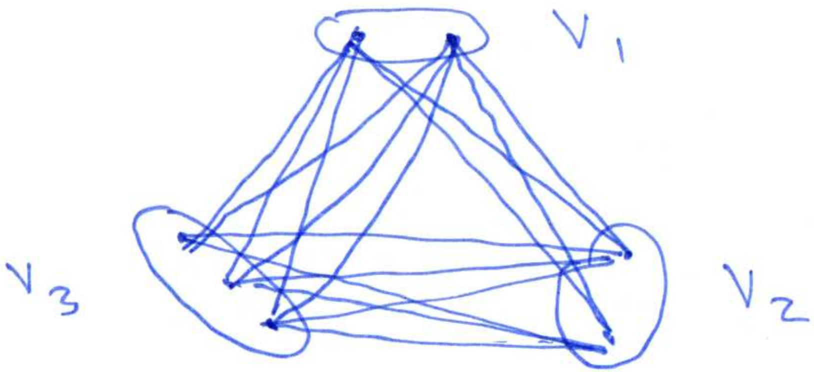
$$|V_1| \le |V_2| \le \dots \le |V_r| \le |V_1| + 1$$

und

$$E(T_r(n)) = \{\{x,y\} \in V(T_r(n))^{(2)} : \text{Es gibt } i,j \in [r] \text{ mit } x \in V_i,\ y \in V_j,\ i \neq j\}$$

<u>Beispiel.</u> Wie sieht $T_3(7)$ aus?

Hier $|V_1| = 2$, $|V_2| = 2$, $|V_3| = 3$



<u>Satz (Turán).</u> Für $r \geq 2$ und $n \geq 0$ gibt's genau einen K_r-freien Graphen auf n Ecken mit $ex(n, K_r)$ Kanten, nämlich $T_{r-1}(n)$

<u>Beweis.</u> Der Turán-Graph $T_{r-1}(n)$ ist K_r-frei (nach Schubfachprinzip). Somit $ex(n, K_r) \geq |E(T_{r-1}(n))|$. Argumentiere bei festem r mit Induktion nach n.

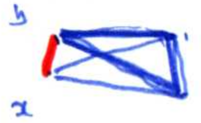
$\underline{n \leq r-1 \,|}$ Wg. $T_{r-1}(n) = K_n$ klar.

$\underline{n-(r-1) \longrightarrow n \,|}$ Sei $G = (V, E)$ ein K_r-freier Graph mit n Ecken und $ex(n, K_r)$ Kanten.

z.z. $G \cong T_{r-1}(n)$.

G enthält K_{r-1}, denn: Wg. $n \geq r$ ist $G \not\cong K_n$. Also gibt's $e = \{x, y\} \in V^{(2)} \setminus E$. Da $G + e$ mehr als

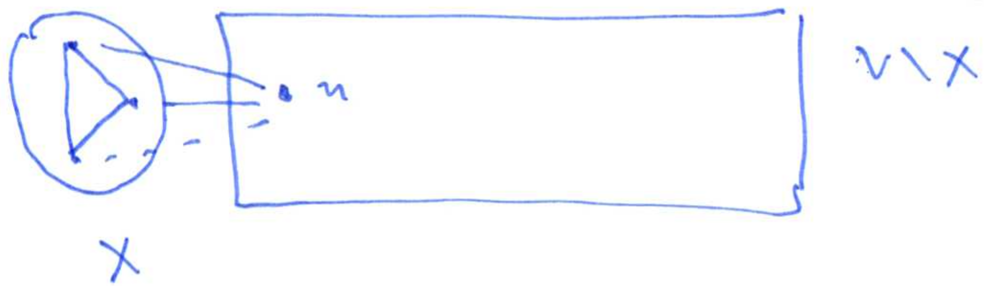
$ex(n, K_r)$ Kanten hat, enthält $G + e$ einen K_r.



Insbesondere $K_{r-1} \subseteq G$.

$r = 4$

Wähle $X \in V^{(r-1)}$ mit $G[X] \cong K_{r-1}$



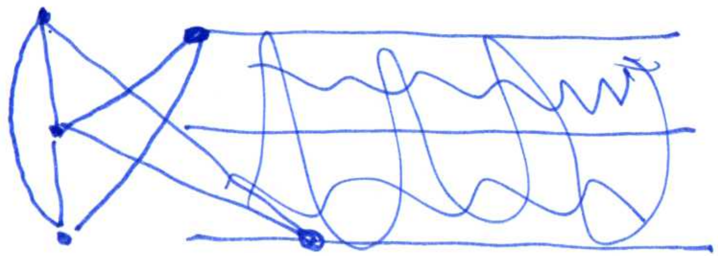
Für $u \in V \setminus X$ ist $G[X \cup \{u\}] \not\cong K_r$, d.h. u hat höchstens $r-2$ Nachbarn in X.

Somit

$$|E| \leq |E(K_{r-1})| + (r-2)|V \setminus X| + |E(T_{r-1}(n-(r-1)))|$$

$$\overset{(*)}{=} |E(T_{r-1}(n))|$$

$T_{r-1}(n)$ Um (*) einzusehen, betrachtet man $T_{r-1}(n)$:



K^{r-1} $T_{r-1}(n-(r-1))$

Damit ist

$$|E| = |E(T_{r-1}(n))|$$

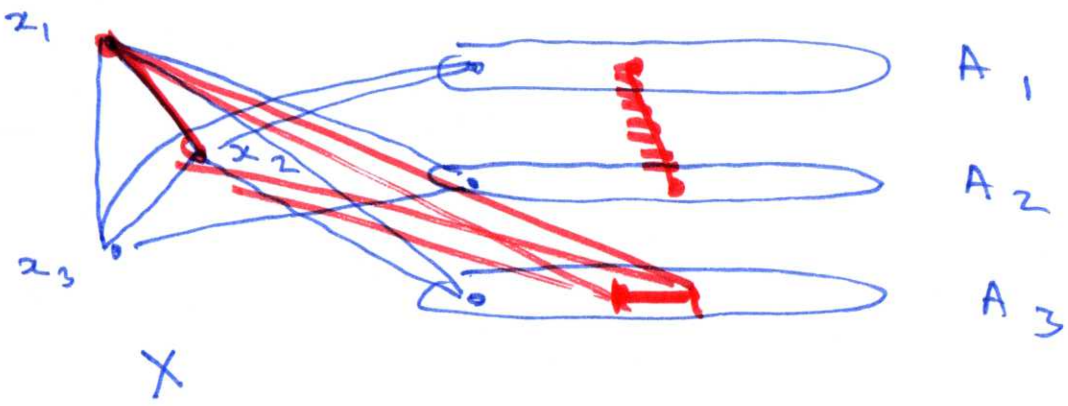
gezeigt. Außerdem hat jede Ecke $u \in V\setminus X$ genau $r-2$ Nachbarn in X. Schreibt man also

$$X = \{x_1, \dots, x_{r-1}\}$$ und

$$A_i = \{u \in V\setminus X : N(u) \cap X = X \setminus \{x_i\}\}$$

für alle $i \in [r-1]$, so ist

$V \setminus X = A_1 \dot\cup \ldots \dot\cup A_{r-1}$



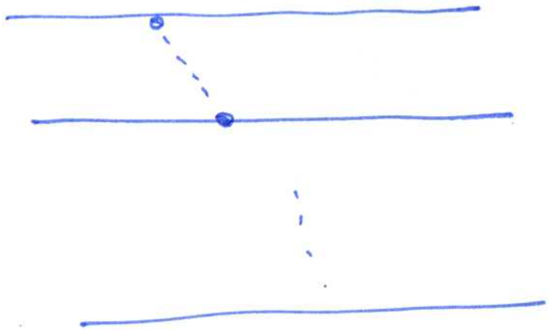
Die Mengen $A_1, \ldots, A_{r-1}$ sind unabhängig, denn:

Gäbe es eine Kante $\{u, v\} \in E$ mit $u, v \in A_i$ für ein $i \in [r-1]$, dann wäre $(X \setminus \{x_i\}) \cup \{u, v\}$ ein K_r in G, Wid.

Also ist

$V = (A_1 \cup \{x_1\}) \dot\cup \ldots \dot\cup (A_{r-1} \cup \{x_{r-1}\})$

eine Partition von V in unabh. Mengen.



$A_1 \cup \{x_1\} = B_1$

$A_2 \cup \{x_2\} = B_2$

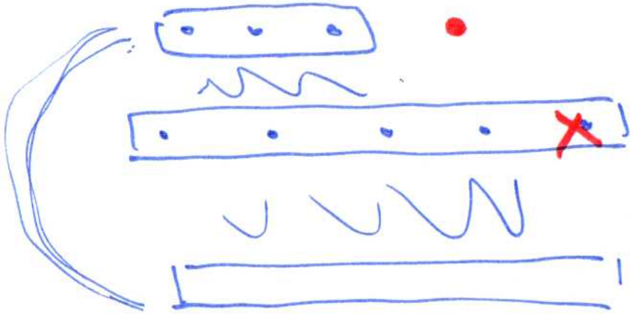
$\vdots$

$A_{r-1} \cup \{x_{r-1}\} = B_{r-1}$

Da G kantenmaximal ohne K_r enthält G alle Kanten zwischen verschiedenen Eckenklassen.

Setze $B_i = A_i \cup \{x_i\}$ für alle $i \in [r-1]$.

<u>Ann:</u> Es gibt $i, j \in [r-1]$ mit $|B_i| \geq |B_j| + 2$.



B_1

B_2

B_3

Es sei G' der Graph, den man aus G erhält, indem man eine Ecke aus B_i nach B_j schiebt.

Dann

$$|E(G')| - |E| = (|B_i|-1)(|B_j|+1) - |B_i||B_j|$$
$$= |B_i| - |B_j| - 1 \geq 1.$$

Wid. zu $|E| = ex(n, K_r)$, da $K_r \nsubseteq G'$. $\square$

Bemerkung. Man kann $ex(n, K_r)$ so ausrechnen:

Division mit Rest liefere

$$n = q(r-1) + s \quad \text{mit} \quad 0 \leq s \leq r-2.$$

Die Eckenklassen von $T_{r-1}(n)$ haben die Größen

$$\underbrace{q, \ldots\ldots, q}_{(r-1)-s}, \underbrace{q+1, \ldots\ldots, q+1}_{s}.$$

also

$$\mathrm{ex}(n, K_r) = \binom{r-1-s}{2} q^2 + ((r-1)-s)s\, q(q+1) + \binom{s}{2}(q+1)^2$$

$$= \frac{r-2}{2(r-1)} \cdot n^2 - \frac{s(r-s-1)}{2(r-1)} .$$

Es folgt

$$\frac{r-2}{2(r-1)} n^2 - \frac{r-1}{8} \leq \mathrm{ex}(n, K_r) \leq \frac{r-2}{2(r-1)} \cdot n^2$$

($\to$ Übung).

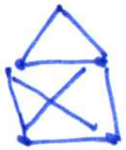
Insbesondere

$$\lim_{n \to \infty} \frac{\mathrm{ex}(n, K_r)}{\binom{n}{2}} = \frac{r-2}{r-1}$$

allgemein nennt man

$$\pi(F) = \lim_{n \to \infty} \frac{ex(n, F)}{\binom{n}{2}}$$

die <u>Turán - Dichte</u> von F. (Der Limes existiert!).



Wir wissen $\pi(K^r) = \frac{r-2}{r-1}$.

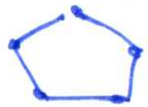
Man kann $\pi(\cancel{F}\, T_r(m)) = \frac{r-2}{r-1}$ (für $m \geq r$)

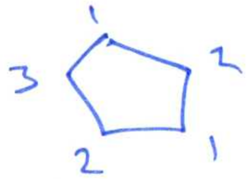
zeigen (Erdös, Stone).

Sei $\chi(F)$ die kleinste Zahl von Farben, mit denen man $V(F)$ so färben kann, dass je zwei benachbarte Ecken von F verschiedenfarbig sind.

(Chromatische Zahl von F).

$\chi($  $) = 4$

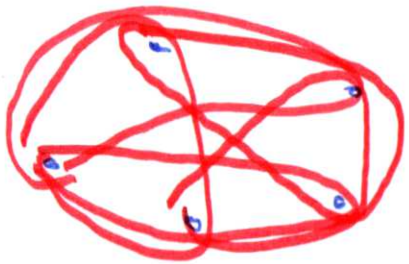
$\chi($  $) = 3$

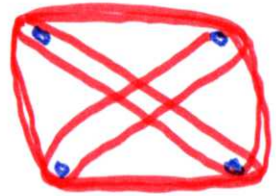


Satz (Erdős, Stone, Simonovits) $\pi(F) = \dfrac{\chi(F)-2}{\chi(F)-1}$.

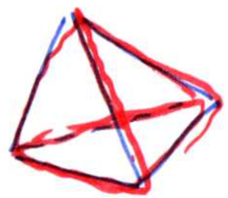
HYPERGRAPHEN.

Dfn. Ein 3-uniformer Hypergraph ist ein Paar (V, E), das aus einer Menge V von Ecken und einer Menge $E \subseteq V^{(3)}$ von Kanten besteht.



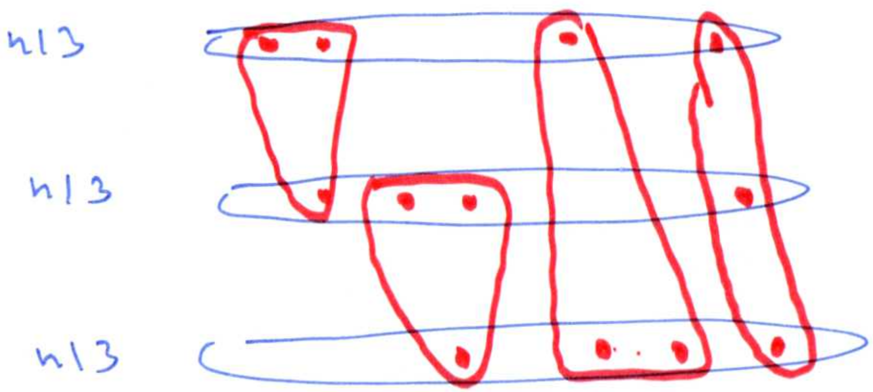


$K_4^{(3)}$



Tetraeder

Frage (Turán) Bestimme $ex(n, K_4^{(3)})$. Oder zumindest

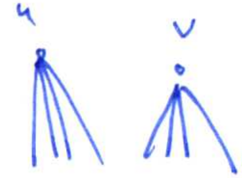


$$\lim_{n \to \infty} \frac{ex(n, K_4^{(3)})}{\binom{n}{3}} = \pi(K_4^{(3)})$$

Man vermutet

$$\pi(K_4^{(3)}) = \frac{5}{9}.$$

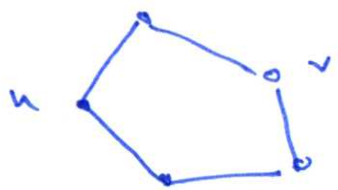
Skizze eines weiteren Beweises des Satzes von Mantel.



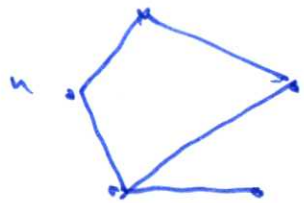
Zykov. Für einen Graphen G und $u, v \in V(G)$ sei $G' = \mathrm{Sym}(G, u, v)$ der Graph mit

$$V(G') = V(G)$$

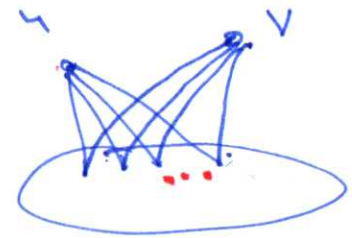
$$E(G') = \big(E(G) \setminus \{e : v \in e\}\big) \cup \big\{\{v, x\} : \{u, x\} \in E(G)\big\}$$



G



$\mathrm{Sym}(G, u, v)$



Wenn $K_3 \not\subseteq G$ und $\{u, v\} \in (V(G))^{(2)} \setminus E(G)$,

dann $K_3 \not\subseteq \mathrm{Sym}(G, u, v)$

Betrachte Graphen $G = (V, E)$ mit n Ecken und $ex(n, K_3)$ Kanten.

<u>Schritt 1.</u> Wenn $\{u, v\} \in V^{(2)} \setminus E$, dann $d(u) = d(v)$.

<u>Denn:</u> Sonst OBdA $d(u) > d(v)$.

Dann widerspräche $Sym(G, u, v)$ der Definition $ex(n, K_3)$.

<u>Schritt 2.</u> Wenn $\{u, v\} \in V^{(2)} \setminus E$ und $\{v, w\} \in V^{(2)} \setminus E$,

dann $v = w$ oder $\{v, w\} \in V^{(2)} \setminus E$.

<u>Denn:</u> Angenommen $\{v, w\} \in E$.

Nach Schritt 1 ist $d(u) = d(v) = d(w)$.

Betrachte $G' = Sym(G, u, v)$.

Dann $\{u, w\} \notin E(G')$ und $d_{G'}(w) < d_{G'}(u)$.

<u>Wid.</u> zu Schritt 1 (für G').

Für $u, v \in V$ schreibe $u \sim v$ wenn $u = v$ oder $\{u, v\} \in V^{(2)} \setminus E$.

Dann ist $\sim$ nach Schritt 2 eine Äquivalenzrelation.

Daher ist G vollständig k-partit für eine Zahl $k \in \mathbb{N}$.

Da $K_3 \nsubseteq G$ ist $k = 2$. Also ist G

vollst. bipartit und es folgt

$$|E| \leq \left\lfloor \frac{n^2}{4} \right\rfloor .$$

$\square$