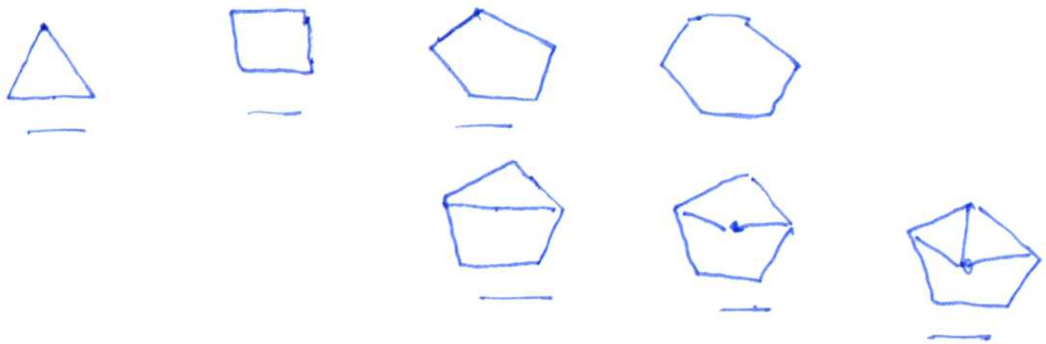
8. Vorlesung



Satz 4.25. Ein Graph G ist genau dann 2-zsh., wenn es eine Folge

$$G_0, G_1, \ldots, G_n$$

von Graphen gibt mit

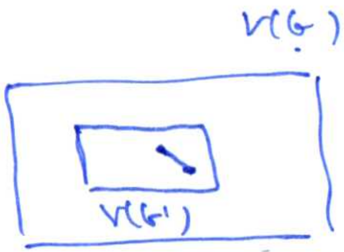
- $G_0 = K_3$, $G_n = G$
- Für alle $i \in [n]$ entsteht G_i aus G_{i-1} durch Hinzufügen oder Unterteilen einer Kante.

Beweis. $\boxed{\Leftarrow}$ Es gebe so eine Folge $G_0, \ldots, G_n$. Durch Induktion nach i zeigt man, dass alle G_i 2-zsh. sind. Insbesondere ist $G = G_n$ 2-zsh.

⇒) Nenne G <u>konstruierbar</u> wenn es eine solche Folge $G_0, \ldots, G_n$ gibt. Alle Kreise sind konstruierbar, da man sie durch schrittweises Unterteilen von Kanten aus einem K_3 erhalten kann.

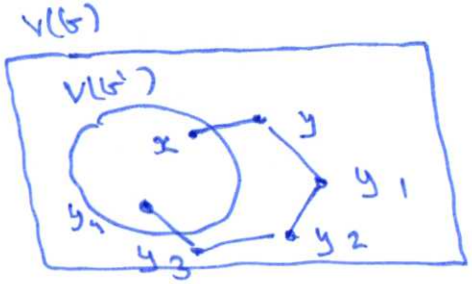
Sei nun G ein 2-zsh. Graph. Nach Satz 4.24 enthält G einen Kreis. Somit hat G einen konstruierbaren Teilgraphen. Es sei G' ein konstruierbarer Teilgraph von G mit möglichst vielen Kanten.

<u>Annahme</u>: $G \neq G'$.



Wäre G' kein induzierter Teilgraph von G, dann gäbe es eine Kante $e \in [E(G) \cap V(G')^{(2)}] \setminus E(G')$. Dann widerspräche $G' + e$ der Wahl von G'. Also ist G' induzierter Teilgraph von G.

also $V(G') \neq V(G)$. Da G' zsh. ist, gibt's Kante



$\{x, y\} \in E(G)$ mit $x \in V(G')$, $y \notin V(G')$.

Da G sogar 2-zsh. ist, ist $G - x$ zsh.

Also gibt's Weg

$$y = y_0 y_1 \dots y_n$$

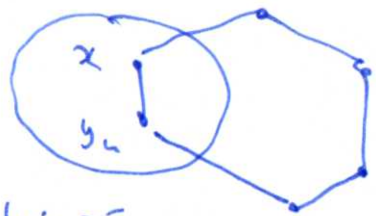
mit $y_n \in V(G')$ und $y_1 \dots y_{n-1} \notin V(G')$.

Der Teilgraph G'' von G, der aus G' und dem Weg $x\, y\, y_1 \dots y_n$ besteht ist konstruierbar, denn:

- Wenn $\{x, y_n\} \notin E(G)$ füge $\{x, y_n\}$ zu G' hinzu und unterteile diese Kante n mal.

G'

- Wenn $\{x, y_n\} \in E(G)$, dann unterteile diese Kante n mal und füge sie am Schluss wieder hinzu.



Also widerspricht G'' der Wahl von G'.

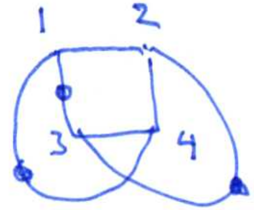
Somit ist doch $G = G'$, d.h. G ist konstruierbar. $\square$

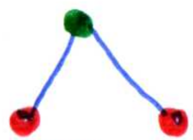
Dreiecksfreie Graphen.

K_3

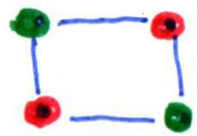
Es sei $T(n)$ die größtmögliche Anzahl von Kanten in einem Graphen mit n Ecken, der keinen K_3 als Teilgraphen enthält.

$n =$	1	2	3	4	5	6
$T(n) =$	0	1	2	4	6	9
$\lfloor \frac{n^2}{4} \rfloor$	0	1	2	4	6	9



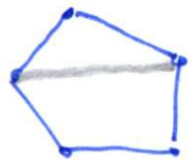


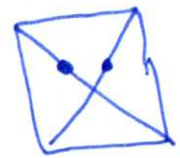
$K_{1,2}$

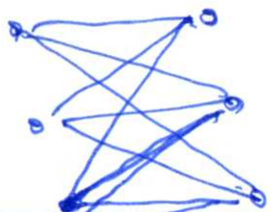


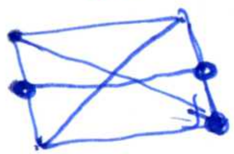
$K_{2,2}$

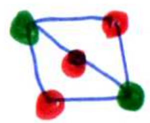
$\binom{4}{2} = 6$











$K_{2,3}$

Satz (Mantel) Für alle $n \in \mathbb{N}$ ist $T(n) = \lfloor \frac{n^2}{4} \rfloor$.

Beweis. $\geq$] Seien X, Y disjunkte Mengen mit

$|X| = \lfloor \frac{n}{2} \rfloor$, $|Y| = \lceil \frac{n}{2} \rceil$

Definiere einen Graphen G durch

$V(G) = X \dot\cup Y$, $E(G) = \{ \{x, y\} : x \in X \ \& \ y \in Y \}$.

Dann enthält G kein Dreieck, denn: Von je drei Ecken sind nach Schubfachprinzip 2 in X oder 2 in Y.

Außerdem $|V(G)| = n$ und

$|E(G)| = |X| \cdot |Y| = \lfloor \frac{n}{2} \rfloor \cdot \lceil \frac{n}{2} \rceil$

Wenn n gerade ist also $|E(G)| = \frac{n}{2} \cdot \frac{n}{2} = \frac{n^2}{4} = \lfloor \frac{n^2}{4} \rfloor$.

Wenn n ungerade ist $|E(G)| = \frac{n-1}{2} \cdot \frac{n+1}{2} = \frac{n^2-1}{4} = \lfloor \frac{n^2}{4} \rfloor$

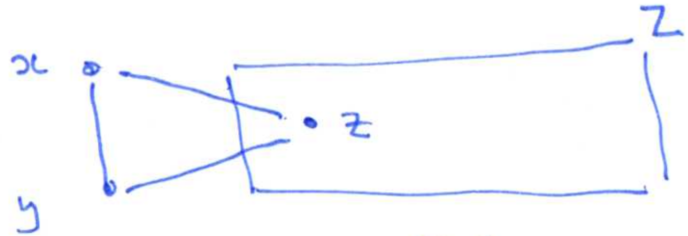
$\leq$ | Zeige $T(n) \leq \lfloor \frac{n^2}{4} \rfloor$ durch Induktion nach n.

$n = 1, 2$ | Klar.

$n \to n+2$ | Sei G ein dreiecksfreier Graph mit $n+2$ Ecken.

Wenn $E(G) = \emptyset$ ist $|E(G)| \leq \lfloor \frac{(n+2)^2}{4} \rfloor$ klar.

Sei nun $\{x, y\} \in E(G)$ beliebig. Sei



n Ecken

$V(G) \setminus \{x, y\} = Z$

Nach Ind. Ann. ist

$E(G[Z]) \leq \lfloor \frac{n^2}{4} \rfloor$.

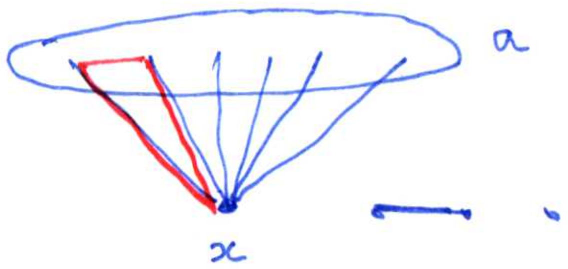
Für jede Ecke $z \in Z$ ist $\{x, z\} \notin E(G)$ oder $\{y, z\} \notin E(G)$.

Somit $|E(G)| \leq \underbrace{1}_{\text{Kante } \{x,y\}} + \underbrace{n}_{\text{Kanten zwischen } \{x,y\} \text{ und } Z} + \underbrace{\lfloor \frac{n^2}{4} \rfloor}_{\text{Kanten in } Z}$

$$= \frac{4+4n}{4} + \left\lfloor \frac{n^2}{4} \right\rfloor = \left\lfloor \frac{4+4n+n^2}{4} \right\rfloor = \left\lfloor \frac{(n+2)^2}{4} \right\rfloor . \quad \square$$

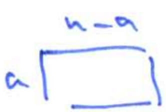
Zweiter Beweis von $T(n) \leq \lfloor \frac{n^2}{4} \rfloor$.

Sei G ein dreiecksfreier Graph mit n Ecken. Wähle Ecke x, für die $d(x)$ maximal ist. Setze $a = d(x)$.



Da G dreiecksfrei ist, ist $N(x)$ unabhängig. Also hat jede Kante von G mindestens eine Endecke in $V(G) \setminus N(x)$. Somit

$$|E(G)| \leq \sum_{z \in V(G) \setminus N(x)} d(z) \leq a \, |V(G) \setminus N(x)|$$



$$= a(n-a) = \frac{n^2 - (n-2a)^2}{4} \leq \frac{n^2}{4} .$$

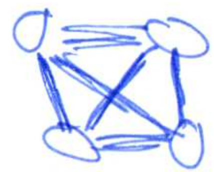
Da $E(G)$ eine ganze Zahl ist, folgt $|E(G)| \leq \lfloor \frac{n^2}{4} \rfloor$. $\square$

Turán.

n Ecken, K_3-frei $\qquad \left\lfloor \frac{n^2}{4} \right\rfloor$

n Ecken, K_4-frei $\qquad \left\lfloor \frac{n^2}{3} \right\rfloor$

K_5-frei



$\approx \frac{n}{4}$