7. Vorlesung

⇒ Gegeben $D = (d_1, \dots, d_n)$

Setze

$$\Omega = \{ G : G \text{ Graph},\ V(G) = [n],\ \overbrace{d_G(i) = d_i}^{\text{für alle } i \in [n]} \}$$

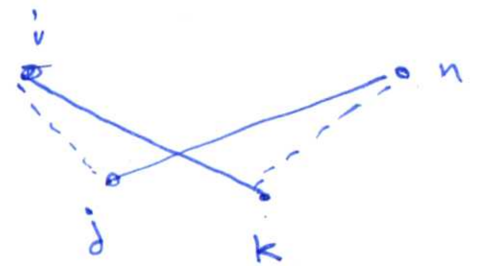
Da D Gradfolge ist, ist $\Omega \neq \emptyset$.

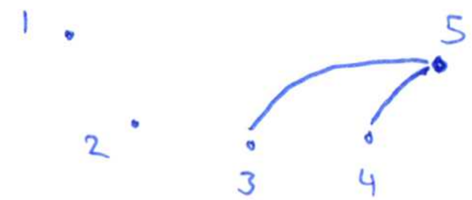
Für $G \in \Omega$ setze $W(G) = \sum_{i \in N(n)} i$. Wähle $G \in \Omega$ so, dass $W(G)$ maximal.

<u>Behauptung</u> Wenn $j < k < n$ und $j \in N(n)$, dann $k \in N(n)$.

<u>Beweis.</u> Angenommen $k \notin N(n)$. Da $d_j \le d_k$

ist $|N(j)| \le |N(k)|$. Also





$$\underbrace{|N(j) \setminus N(k)|}_{\substack{\neq \emptyset, \text{ da} \\ n \in N(j) \setminus N(k).}} \le |N(k) \setminus N(j)|.$$

Somit $N(k) \setminus N(j) \neq \emptyset$. Wähle $i \in N(k) \setminus N(j)$.

Setze $G' = ([n], E(G) \cup \{\{i,j\},\{k,n\}\} \setminus \{\{i,k\},\{j,n\}\})$.

Der Graph G' hat auch die Gradfolge D, d.h. $G' \in \Omega$.

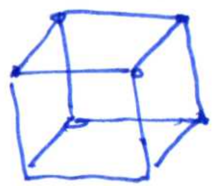
Aber $W(G') - W(G) = k - j > 0$, d.h. G' widerspricht der Maximalität von $W(G)$. Das beweist die Behauptung.

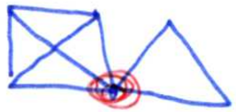
Aus der Behauptung folgt $N(n) = \{n-d_n, \dots, n-1\}$.

Also hat $G-n$ die Gradfolge D'. $\square$

2-zusammenhängende Graphen.

Dfn 4.20 Ein Graph G heißt 2-zusammenhängend, wenn er mind. 3 Ecken hat und jeder Graph, den man aus G durch Löschen einer Ecke erhalten kann, zsh. ist.

Beispiele.  ,  , ... sind 2-zsh.,



sind nicht 2-zsh.

<u>Dfn 4.21.</u> Sei $G = (V, E)$ ein Graph.

(a) Für $x \in V$ setze $G - x = (V \setminus \{x\}, \{e \in E : x \notin e\})$.

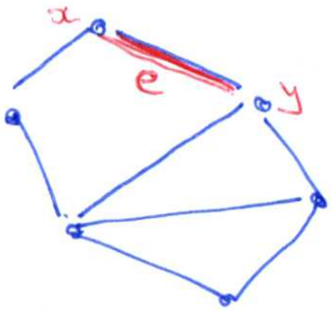
(b) Für $e \in E$ setze $G - e = (V, E \setminus \{e\})$.

(c) Für $e \in V^{(2)} \setminus E$ setze $G + e = (V, E \cup \{e\})$.

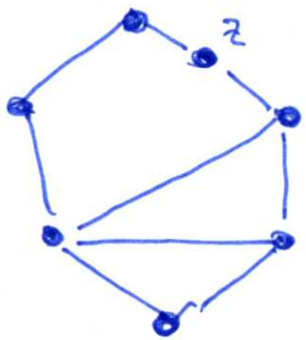
(d) Für $e = \{x, y\} \in E$ setze

$$G \% e = (V \dot\cup \{z\}, E \cup \{\{x,z\},\{z,y\}\} \setminus \{\{x,y\}\}),$$

wobei $z \notin V$.



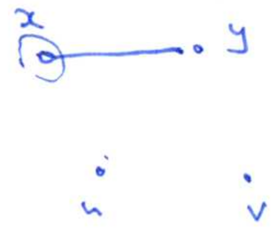
G



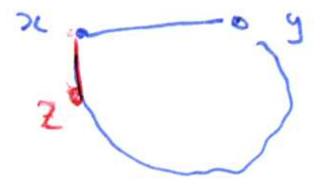
G % e

Beob 4.22. Sei G 2-zsh. und $e \in E(G)$. Dann ist $G - e$ zsh.

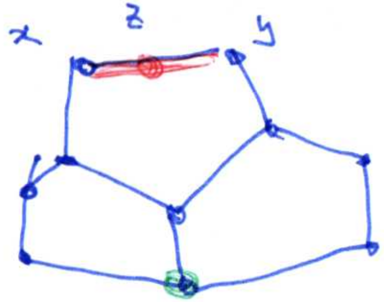
Beweis. Schreibe $e = \{x, y\}$. Seien $u, v \in V(G)$ bel. Z.z. ist, dass in $G - e$ ein Weg von u nach v existiert.



Wenn $x \notin \{u, v\}$ gibt's einen solchen Weg sogar in $G - x$. Analog gibt's einen solchen Weg, wenn $y \notin \{u, v\}$. Damit bleibt nur der Fall $\{x, y\} = \{u, v\}$ zu betrachten. Da $G - y$ zsh. ist, gibt's eine Ecke $z \neq y$ mit $\{x, z\} \in E(G)$. In $G - x$ gibt's einen Weg von z nach y. Zusammen mit der Kante $\{x, z\}$ bildet dieser den gesuchten Weg von x nach y in $G - e$. $\square$



Beob 4.23. Sei $G = (V, E)$ ein Graph und $e \in E$.
Genau dann ist $G \% e$ 2-zsh. wenn G 2-zsh. ist.



Beweis. $\Rightarrow|$ Sei $G \% e$ 2-zsh. Dann ist $G \% e$ kein K_3, also $|V(G \% e)| \geq 4$. Somit $|V| \geq 3$.
Sei nun $v \in V$ bel. Dann ist $(G \% e) - v$ zsh. und mithin ist auch $G - v$ zsh.

$\Leftarrow|$ Sei G 2-zsh. Dann $|V(G \% e)| > |V| \geq 3$.
Sei $e = \{x, y\}$: Die neue Ecke sei z.

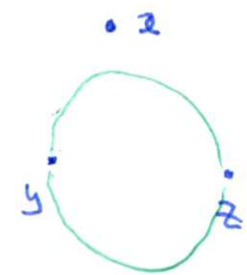
Wenn $v \in V \setminus e$, dann ist $(G \% e) - v = (G - v) \% e$ zsh., da $G - v$ zsh. ist.

Wenn $v \in e$, dann ist $(G \% e) - v$ zsh. (!)

Außerdem ist $(G \% e) - z = G - e$ nach Beob. 4.22 zsh.

Satz 4.24. Ein Graph G ist genau dann 2-zsh., wenn es zu je zwei Ecken x, y einen Kreis durch x und y gibt.

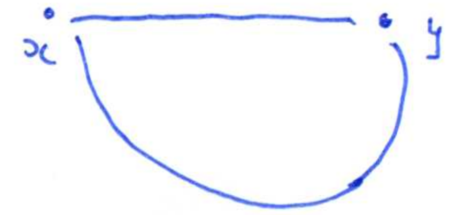
Beweis. $\Leftarrow]$ G habe die Kreiseigenschaft. Da G einen Kreis enthält, ist $|V(G)| \geq 3$. Seien $x \in V(G)$ beliebig und $y, z \in V(G - x)$. Nach Voraussetzung gibt's einen Kreis durch y und z und damit zwei Wege von y nach z, die keine gemeinsamen inneren Ecken haben.

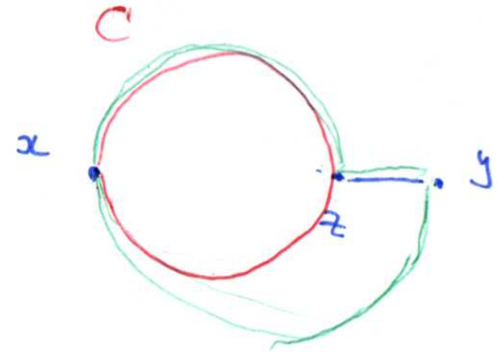


Da x auf höchstens einem der beiden Wege liegt, gibt's in $G - x$ einen Weg von y nach z.

$\Rightarrow]$ Sei G 2-zsh. Angenommen, G hätte die Kreiseigenschaft nicht. Wähle $x, y \in V(G)$ so, dass es keinen Kreis durch x, y gibt und dabei $k = d(x, y)$

minimal ist. Wäre $k = 1$, d.h. wäre $e = \{x, y\}$ eine Kante von G, dann wäre $G - e$ nach Beob 4.22. zsh. und daher gäbe es doch einen Kreis durch x, y, <u>Wid.</u>





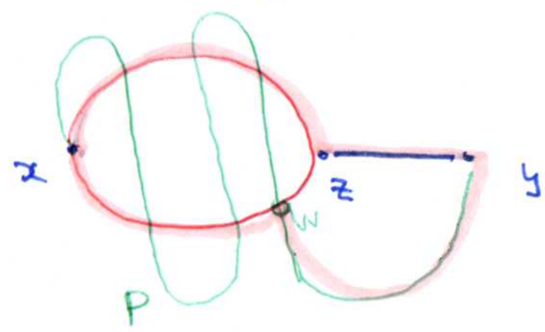
Also $k > 1$. Es gibt einen Nachbarn z von y mit $d(x, z) = k - 1$, denn:

Sei $x = v_0 v_1, \dots v_k = y$ ein Weg der Länge k von x nach y.

Dann tut's $z = v_{k-1}$.

Nach Minimalität von k gibt's Kreis C durch x, z.

Da $G - z$ zsh. ist, gibt's in $G - z$ einen Weg P von x nach y. Sei w die letzte Ecke von P auf C. Nun gibt es einen Kreis durch x, y, der



von P das Segment von w bis y benutzt, ferner die Kante $\{z, y\}$ und schließlich von C den x enthaltenden Weg zwischen z und w. $\square$