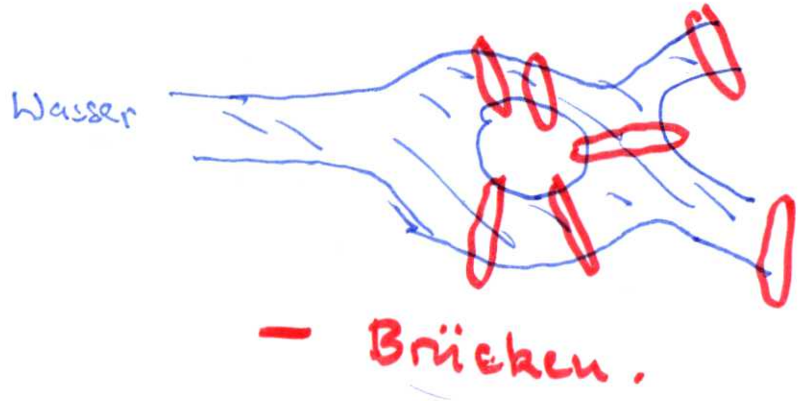
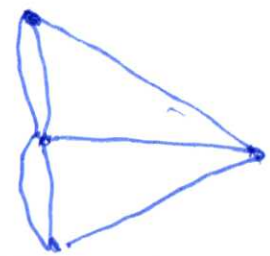
Eulersche Graphen

6. Vorlesung



Dfn 4.10. Es sei G ein Graph. Eine geschlossene Euler-Tour in G ist ein Spaziergang

$$v_0 e_1 v_1 e_2 v_2 \ldots v_{m-1} e_m v_m$$



mit

- $v_0 = v_m$
- $V(G) = \{v_0, v_1, \ldots, v_m\}$, $E(G) = \{e_1, \ldots, e_m\}$
- $|E(G)| = m$.

Wenn G eine geschlossene Euler Tour besitzt, dann heißt G Euler'sch.

Dfn 4.11. Es sei G ein Graph und $x \in V(G)$. Dann heißt

$$N(x) = \{y \in V(G) : \{x, y\} \in E(G)\}$$ die <u>Nachbarschaft</u>

und

$$d(x) = |N(x)|$$ der <u>Grad</u> von x.

<u>Satz 4.12 (Euler)</u> Ein Graph G ist genau dann Euler'sch, wenn er zusammenhängend ist und jede Ecke geraden Grad hat.

<u>Beweis.</u> $\Rightarrow]$ klar.

$\Leftarrow]$ Betrachte maximalen Spaziergang

$$S = v_0 e_1 v_1 \dots v_{m-1} e_m v_m,$$

wobei $e_1, \dots, e_m$ paarweise verschieden sind.

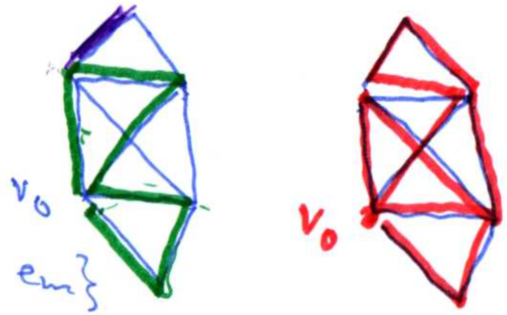
<u>Annahme</u>: $v_0 \neq v_m$

Die Anzahl der Kanten $e \in E(G)$ mit $v_m \in e$ ist gerade. Von diesen Kanten sind e_m und einige Paare e_i, e_{i+1} mit $v_i = v_m$. Also ist ~~eine~~ ungerade Zahl dieser Kanten auf S. Also gibt's Kante $e \in E(G) \setminus \{e_1, \dots, e_m\}$ mit $v_m \in e$. Schreibe $e = \{v_m, x\}$. Nun widerspricht

$$v_0 e_1 v_1 \dots e_m v_m e x$$

der Maximalität von m.

Also $v_0 = v_m$.



Annahme: Es gibt Kante $e \in E(G) \setminus \{e_1, \ldots, e_m\}$ die eine Endecke in $\{v_0, \ldots, v_m\}$ hat.

Schreibt man $e = \{v_i, x\}$, so widerspricht

$$v_i \, e_{i+1} \, v_{i+1} \ldots\ldots v_m \, e_1 \, v_1 \ldots e_i \, v_i \, e \, x$$

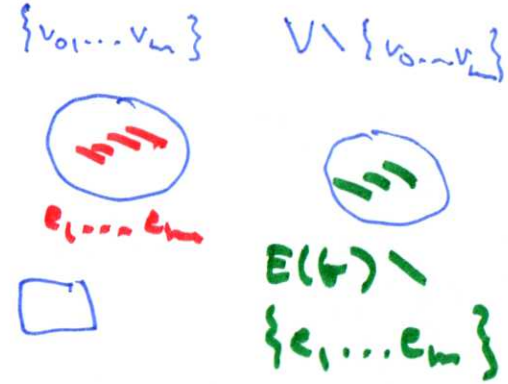
der Maximalität von m.

Dies zeigt: Jede Kante $e \in E(G) \setminus \{e_1, \ldots, e_m\}$ verbindet zwei Ecken aus $V \setminus \{v_0, \ldots, v_m\}$ ..... (*)

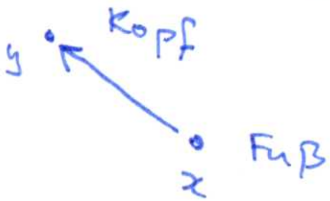
Da G zsh. ist, folgt $V = \{v_0, \ldots, v_m\}$.

Wg. (*) folgt $E(G) = \{e_1, \ldots, e_m\}$.

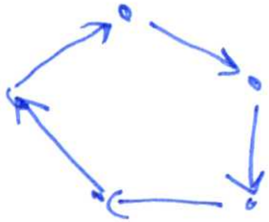
Insgesamt ist S eine geschlossene Euler Tour. □



Gerichtete Euler'sche Graphen.



Dfn. 4.13 Ein <u>gerichteter Graph</u> G ist ein Paar (V, E), das aus einer Eckenmenge V und einer Menge $E \subseteq V \times V$ von <u>gerichteten Kanten</u> besteht. Die Ecke x heißt <u>Fuß</u> der ger. Kante (x, y) und y heißt ihr <u>Kopf</u>.



Ist $G = (V, E)$ ein gerichteter Graph und $x \in V$, so heißt

$$d^+(x) = |\{ y \in V : (x, y) \in E \}| \quad \text{\underline{Ausgrad}}$$

und

$$d^-(x) = |\{ y \in V : (y, x) \in E \}| \quad \text{\underline{Eingrad}}$$ von x.

Ist $G = (V, E)$ ein gerichteter Graph, so heißt

$(V, \{\{x, y\} : (x, y) \in E\})$ der G zugrunde liegende Graph.

Eine <u>geschlossene Euler Tour</u> in einem gerichteten Graphen $G=(V,E)$ ist eine Folge

$$v_0\, e_1\, v_1\, e_2\, v_2 \;...\; e_m\, v_m$$

mit

- $V = \{v_0, ..., v_m\}$, $E = \{e_1, ..., e_m\}$
- $|E| = m$
- $e_i = (v_i, v_{i+1})$ für alle $i \in [m]$
- $v_0 = v_m$.

<u>Satz 4.14.</u> Ein gerichteter Graph $G=(V,E)$ besitzt genau dann eine geschlossene Euler Tour, wenn

- der G zugrunde liegende Graph zsh. ist
- und $d^+(x) = d^-(x)$ für alle $x \in V$.

<u>Beweis.</u> Übung.

Satz 4.15. Es sei $k \in \mathbb{N}$. Man kann so 2^k Nullen und Einsen an den Rand einer drehbaren Kontrollscheibe schreiben, dass man in einem Sichtfenster der Länge k alle Folgen aus k Nullen und Einsen sehen kann.

Kontrollscheibe

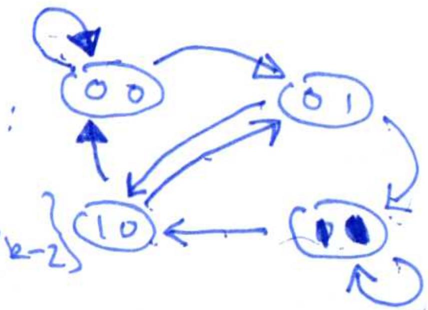
Beweis. (Skizze) Definiere gerichteten Graphen G durch

$$V(G) = \{0,1\}^{k-1}$$

und

$$E(G) = \{((a_1,\dots,a_{k-1}),(b_1,\dots,b_{k-1})) \in V \times V : a_2 = b_1 \;\&\; a_3 = b_2 \;\&\; \dots \;\&\; a_{k-1} = b_{k-2}\}$$

$k = 3$



Es genügt, eine geschlossene Euler Tour in G zu finden.

- Für jede Ecke $x \in V(G)$ ist $d^+(x) = d^-(x) = 2$
- Der G zugrunde liegende Graph ist zsh, denn:

denn von $(a_1, \dots, a_{k-1})$ zu $(b_1, \dots, b_{k-1})$ gibt's einen Weg mit inneren Ecken

$$(a_2, \dots, a_{k-1}, b_1)$$
$$(a_3, \dots, a_{k-1}, b_1, b_2)$$
$$\vdots$$
$$(a_{k-1}, b_1, \dots, b_{k-1}).$$

$\square$

Gradfolgen.

$$\begin{array}{ccccc} a_1 & a_2 & \dots & a_{k-1} & \\ & \parallel & & \parallel & \\ & b_1 & \dots & b_{k-2} & b_{k-1} \end{array}$$

Lemma 4.16. Für jeden Graphen G gilt

$$\sum_{x \in V(G)} d(x) = 2\,|E(G)|.$$

Beweis. Betrachte die Menge $I = \{ (v,e) : V \times E : v \in e \}$.

Für jede Ecke v gibt's $d(v)$ Kanten e mit $(v,e) \in I$ und daher

$$|I| = \sum_{v \in V(G)} d(v),$$

Andererseits gibt's für jede Kante $e \in E(G)$ genau zwei Ecken $v \in V(G)$ mit $(v,e) \in I$. Also

$$|I| = \sum_{e \in E(G)} 2 = 2\,|E(G)|. \qquad \square$$

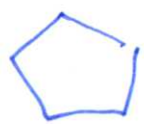
<u>Folgerung 4.17.</u> Für jeden Graphen G ist die Anzahl der Ecken mit ungeradem Grad gerade. $\square$

<u>Dfn 4.18.</u> Ist G ein Graph mit Ecken $v_1, \dots, v_n$, so heißt

$$(d(x_1), \dots, d(x_n))$$

eine Gradfolge von G.

<u>Beispiele.</u>

Graph			
Gradfolge	$(2,2,2,2,2)$	$(2,3,3,4,4)$	$(2,2,2,2,2,2)$

Satz 4.19. Es seien $n > 1$ und $D = (d_1, \dots, d_n)$ eine Folge nichtnegativer ganzer Zahlen mit $d_1 \leq \dots \leq d_n$.
Definiere $D' = (d_1', \dots, d_{n-1}')$ durch

$$d_i' = \begin{cases} d_i & \text{für } i < n - d_n \\ d_i - 1 & \text{für } i \geq n - d_n . \end{cases}$$

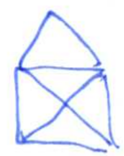
Dann ist D genau dann Gradfolge eines Graphen, wenn D' Gradfolge eines Graphen ist.

Beispiel. Für $D = (2, 3, 3, 4, 4)$

ist $D' = (1, 2, 2, 3)$,

also $D'' = (0, 1, 1)$

und $D''' = (0, 0)$. $\quad (D'''' = (0))$



Da D''' Gradfolge von • • ist, ist auch D eine Gradfolge.

Beweis. $\Leftarrow$) Sei G' ein Graph mit Gradfolge D',

$V(G') = [n-1]$, $d_{G'}(i) = d_i'$ für alle $i \in [n-1]$.

Definiere Graph G durch $V(G) = [n]$

und

$$E(G) = E(G') \cup \{(i,n) : n - d_n \le i \le n-1\}.$$

Nun

$$d_G(i) = \begin{cases} d_{G'}(i) = d_i' = d_i & \text{für } i < n - d_n \\ d_{G'}(i) + 1 = d_i & \text{für } n - d_n \le i \le n-1 \\ d_n & \text{für } i = n \end{cases}$$

Also ist D eine Gradfolge von G.

$\Rightarrow$) Dienstag.

d_{d_n}