5. Vorlesung.

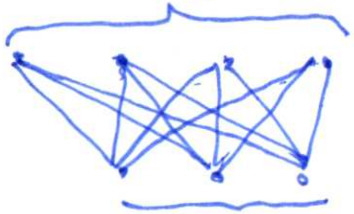
K_5 C_5

Wege.

P_5

$P_n = (\{0, 1, \ldots, n\}, \{\{i, i+1\} : 0 \leq i < n\})$.

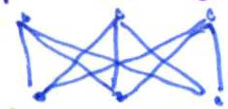
Vollständig bipartite Graphen



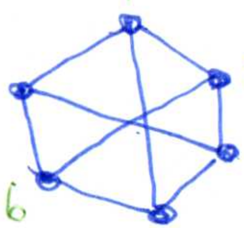
$K_{m,n}$

$V(K_{m,n}) = \{u_1, \ldots, u_m, v_1, \ldots, v_n\}$

$E(K_{m,n}) = \{\{u_i v_j\} : 1 \leq i \leq m, 1 \leq j \leq n\}$.



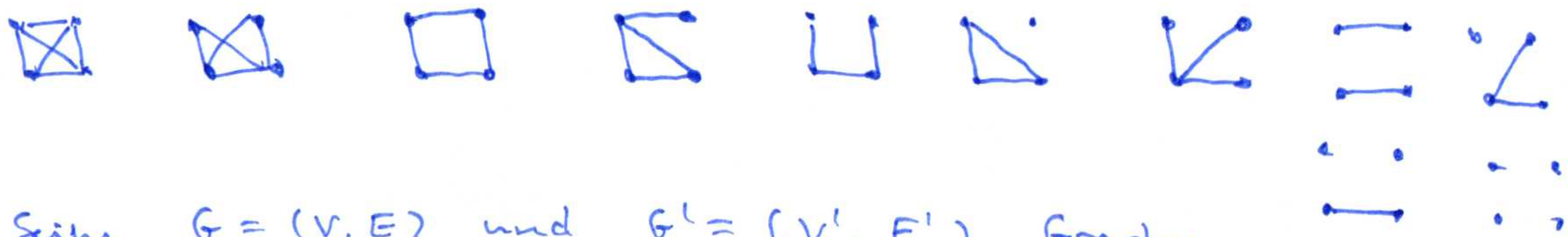
$K_{3,3}$



Dfn 4.2. Zwei Graphen $G = (V, E)$, $G' = (V', E')$ heißen <u>isomorph</u>, wenn es eine Bijektion $\varphi : V \longrightarrow V'$ gibt mit

$$\forall x, y \in V \quad \left[\; \{x, y\} \in E \longleftrightarrow \{\varphi(x), \varphi(y)\} \in E' \; \right]$$

Isomorphie ist eine Äquivalenzrelation.

n	Graphen mit n Ecken
1	
2	
3	
4	

Dfn 4.3. Seien $G = (V, E)$ und $G' = (V', E')$ Graphen.

- G heißt <u>Teilgraph</u> von G' wenn $V \subseteq V'$, $E \subseteq E'$
- G heißt <u>induzierter Teilgraph</u> (<u>Untergraph</u>) von G', wenn

$V \subseteq V'$ und $E = E' \cap V^{(2)}$.

Ist G ein Graph, so schreiben wir $V(G)$, $E(G)$ für die Eckenmenge bzw. die Kantenmenge von G. Ist G ein Graph und $X \subseteq V(G)$ so schreiben wir $G[X] = (X, E(G) \cap X^{(2)})$ für den von X induzierten Teilgraphen von G.

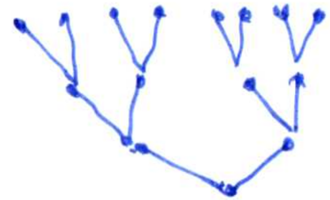
Ein Weg in einem Graphen G ist ein Teilgraph von G, der ein Weg ist. Man kann Wege in G als Folgen

$$v_0 e_1 v_1 e_2 v_2 \dots v_{t-1} e_t v_t$$

mit paarweise verschiedenen Ecken $v_0, \dots, v_t \in V(G)$ und Kanten $e_i = \{v_{i-1}, v_i\} \in E(G)$ beschreiben. Die Zahl t heißt Länge des Weges. Wir erlauben Wege der Länge 0, die nur aus einer Ecke bestehen.

Ein Graph G heißt <u>zusammenhängend</u>, wenn es für je zwei Ecken $x, y \in V(G)$ einen Weg von x nach y gibt.

<u>Beispiele</u>.

 ,  ,  sind zsh.

ist nicht zsh.

Es sei G ein Graph. Definiere eine Relation $\sim$ auf $V(G)$ durch:

$x \sim y$ genau dann wenn es einen Weg in G von x nach y gibt.

Offenbar ist $\sim$ reflexiv und symmetrisch.

Außerdem ist $\sim$ transitiv, denn: Sei $x \sim y$, $y \sim z$.

Indem wir einen Weg von x nach y und einen Weg von y nach z hintereinander hängen, erhalten wir eine Folge

$$(*) \qquad x = v_0 \, e_1 \, v_1 \, e_2 \, \ldots \, v_{t-1} \, e_t \, v_t = z$$

mit

- $v_0, v_1, \ldots, v_t \in V(G)$
- $e_i = \{v_{i-1}, v_i\} \in E(G)$ für alle $i \in [t]$.

Unter allen solchen Folgen sei $(*)$ so gewählt, dass t minimal ist.

Dann ist $v_i \neq v_j$ für $0 \leq i < j \leq t$, da sonst

$$x = v_0 \, e_1 \, v_1 \, \ldots \, v_i \, e_{j+1} \, v_{j+1} \, \ldots \, v_t = z$$

der Minimalität von t widerspräche. Also ist $(*)$ ein Weg und es gilt $x \sim z$.

Insgesamt ist $\sim$ eine Äquivalenzrelation.

Es seien $V_1, \dots, V_k$ die Äquivalenzklassen von $\sim$.

Dann heißen $G[V_1], \dots, G[V_k]$ die <u>Komponenten</u> von G.

Sei G ein Graph. ~~und~~ Ein <u>Spaziergang</u> in G ist eine Folge

$$v_0 e_1 v_1 \dots v_{t-1} e_t v_t$$

mit

- $v_0, \dots, v_t \in V(G)$
- $e_i = \{v_{i-1}, v_t\} \in E(G)$ für alle $i \in [t]$.

<u>Satz 4.5.</u> Seien G ein Graph und $x, y \in V(G)$. Es gibt genau dann einen Weg von x nach y, wenn es einen Spaziergang von x nach y gibt.

<u>Beweis.</u> $\Rightarrow)$ klar, da Wege Spaziergänge sind.

"$\Leftarrow$" Ein kürzester Spaziergang von x nach y ist ein Weg. $\square$

Definition 4.6. Es sei $G = (V, E)$ ein zsh. Graph. Für je zwei Ecken $x, y \in V$ heißt

$$d(x,y) = \min\{t \in \mathbb{N}_0 : \text{es gibt einen Weg von } x \text{ nach } y \text{ der Länge } t\}$$

der *Abstand* von x nach y.

Beispiel.

$d(1,2) = 2$

Beobachtung 4.7. Ist $G = (V, E)$ ein Graph, so ist (V, d) ein metrischer Raum, d.h.

- $d(x,y) \geq 0$ für alle x,y und $d(x,y) = 0 \iff x = y$.
- $d(x,y) = d(y,x)$ für alle $x,y \in V$
- $d(x,z) \leq d(x,y) + d(y,z)$ für alle $x,y,z \in V$

("Dreiecksungleichung")

<u>Dfn. 4.8.</u> Es sei G ein Graph mit n Ecken und $V(G) = \{v_1, \ldots, v_n\}$.

Die <u>Adjazenzmatrix</u> $A_G = (a_{ij})_{1 \leq i,j \leq n \times n}$ ist die $(n \times n)$-Matrix mit

$$a_{ij} = \begin{cases} 1 & \text{wenn } \{v_i, v_j\} \in E(G) \\ 0 & \text{sonst} \end{cases}$$

<u>Beispiel.</u>

hat Adjazenzmatrix $\begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}$

Lemma 4.9. Es sei G ein Graph mit n Ecken, $V(G) = \{v_1, v_2, \dots, v_n\}$, A_G die Adjazenzmatrix von G, $k \in \mathbb{N}$ und $A_G^k = (a_{ij}^{(k)})_{1 \le i,j \le n}$. Für alle $i, j \in [n]$ ist $a_{ij}^{(k)}$ die Anzahl der Spaziergänge in G der Länge k von v_i nach v_j.

Beweis. Induktion nach k.

$\boxed{k=1}$ klar, nach Definition von A_G.

$\boxed{k \to k+1}$ Betrachte $i, j \in [n]$. Es gebe Q Spaziergänge von v_i nach v_j der Länge $k+1$. Nun

$$Q = \sum_{\substack{\ell \in [n] \\ \{v_i, v_j\} \in E(G)}} \text{Anzahl der Spaziergänge der Länge } k \text{ von } v_\ell \text{ nach } v_j.$$

Nach Ind. Ann. ist also

$$Q = \sum_{\substack{l \in [n] \\ \{v_i, v_l\} \in E(G)}} a_{lj}^{(k)} = \sum_{l \in [n]} a_{il} \, a_{lj}^{(k)}$$

= Skalarprodukt der i^{ten} Zeile von A_G mit der j^{ten} Spalte von A_G^k

$$= a_{ij}^{(k+1)} \qquad (\text{da } A_G^{k+1} = A_G \cdot A_G^k) \qquad \square$$

Euler'sche Graphen.