Lemma 3.9. Für alle ganzen Zahlen $n, k \geq 1$ gilt

$$\binom{n}{k} = \binom{n-1}{k} + \binom{n-1}{k-1}.$$

Beweis. Nach Lemma 3.7 ist $\binom{n}{k} = \left| [n]^{(k)} \right|$.

Die Anzahl der $A \in [n]^{(k)}$ mit $\left\{ \begin{matrix} n \in A \\ n \notin A \end{matrix} \right\}$ ist $\left\{ \begin{matrix} \binom{n-1}{k-1} \\ \binom{n-1}{k} \end{matrix} \right\}$. $\square$

Pascal'sches Dreieck.

$$\begin{matrix} & & \binom{0}{0} & & \\ & \binom{1}{0} & & \binom{1}{1} & \\ \binom{2}{0} & & \binom{2}{1} & & \binom{2}{2} \\ & & \cdots & & \end{matrix} \qquad \begin{matrix} & & & & 1 & & & & \\ & & & 1 & & 1 & & & \\ & & 1 & & 2 & & 1 & & \\ & 1 & & 3 & & 3 & & 1 & \\ 1 & & 4 & & 6 & & 4 & & 1 \end{matrix}$$

Satz 3.10. Für alle $x, y \in \mathbb{R}$ und alle $n \in \mathbb{N}_0$ gilt

$$(x+y)^n = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} x^k y^{n-k}.$$

Beweis. Siehe Analysis I. $\square$

Lemma 3.11. Für $k, m, n \in \mathbb{N}_0$ gilt
$$\binom{m+n}{k} = \sum_{i=0}^{k} \binom{m}{i}\binom{n}{k-i}.$$

Beweis. Im Raum sind m Frauen und n Männer.
Auf wie viele Arten können sie einen Ausschuss der Größe k bilden?
Einerseits $\binom{m+n}{k}$ (da das Geschlecht der Personen keine Rolle spielt).
Andererseits sind i Frauen im Ausschuss für ein i mit $0 \leq i \leq k$.
Bei festem i gibt's $\binom{m}{i}$ Möglichkeiten für die Frauen und $\binom{n}{k-i}$
für die Männer.

$\square$

Aufgabe: Im Bällebad sind m_1 rote Bälle, m_2 grüne, ...,
m_r Bälle in der r^{ten} Farbe.

Auf wie viele Arten kann man die Bälle in einer Reihe anordnen?

Antwort: $\dfrac{(m_1+\dots+m_r)!}{m_1!\, m_2! \cdot \ldots \cdot m_r!}$

Beweis. Induktion nach r.

$\boxed{r=1}$ $\dfrac{m_1!}{m_1!} = 1$.

$\boxed{r-1 \to r}$ Setze $m = m_1 + \dots + m_r$. Es gibt $\binom{m}{m_1}$ Möglichkeiten, wo die roten Bälle sind. Wenn man weiß, wo die roten Bälle sind, gibt's nach Ind. Ann. $\dfrac{(m-m_1)!}{m_2! \cdot \ldots \cdot m_r!}$ Möglichkeiten.

Die gesuchte Zahl ist

$$\binom{m}{m_1} \cdot \frac{(m-m_1)!}{m_2! \cdot \ldots \cdot m_r!} = \frac{m!}{m_1!\,\cancel{(m-m_1)!}} \cdot \frac{\cancel{(m-m_1)!}}{m_2! \cdot \ldots \cdot m_r!}. \qquad \square$$

Für $m = m_1 + \dots + m_r$ heißt

$$\frac{m!}{m_1! \cdot \dots \cdot m_r!} = \binom{m}{m_1, \dots, m_r} \qquad \text{(Multinomialkoeffizient)}.$$

Satz 3.12. Für alle $x_1, \dots, x_r \in \mathbb{R}$ und $n \in \mathbb{N}_0$ gilt

$$(x_1 + \dots + x_r)^n = \sum_{\substack{n_1 + \dots + n_r = n \\ n_1, \dots, n_r \in \mathbb{N}_0}} \binom{n}{n_1, \dots, n_r} x_1^{n_1} \cdot \dots \cdot x_r^{n_r}.$$

$\square$

Näherungen.

Dfn. 3.13. Seien $f, g : \mathbb{N} \to \mathbb{R}$ Funktionen. Man schreibt $f(n) = O(g(n))$ wenn's $n_0 \in \mathbb{N}$, $C \in \mathbb{R}$ gibt mit

$$\forall n \geq n_0 \quad |f(n)| \leq C \cdot g(n).$$

Beispiele

$$n^3 + 5n^2 + 9n + 1 = O(n^3).$$

$$n + 1 = O(n^2) \qquad (\text{da } n + 1 \leq n^2 \text{ für } n \geq 2)$$

$$n+1 = O(n) \qquad (\text{da } n+1 \leq 2\cdot n)$$

<u>Lemma 3.14.</u> Für alle $n \in \mathbb{N}$ ist $n! > \left(\frac{n}{e}\right)^n$,

wobei $e = 2.71828 1828 \ldots$

<u>Beweis.</u> $$e^n = \sum_{m=0}^{\infty} \frac{n^m}{m!} > \frac{n^n}{n!}, \text{ also } n! > \left(\frac{n}{e}\right)^n. \qquad \square$$

<u>Satz 3.15.</u> <u>(Stirling)</u> Für alle $n \in \mathbb{N}$ ist

$$\sqrt{2\pi n}\left(\frac{n}{e}\right)^n < n! < \sqrt{2\pi n}\left(\frac{n}{e}\right)^n \cdot e^{\frac{1}{12n}}.$$

Insbesondere $$n! \sim \sqrt{2\pi n}\left(\frac{n}{e}\right)^n.$$

<u>Lemma 3.16.</u> Für $1 \leq k \leq n$ ist $\left(\frac{n}{k}\right)^k \leq \binom{n}{k} < \left(\frac{en}{k}\right)^k$.

<u>Beweis.</u> Für $0 \leq i < k$ ist $\frac{n-i}{k-i} \geq \frac{n}{k}$ (denn dies ist

$$\iff \frac{n-i}{n} \geq \frac{k-i}{k} \iff \frac{i}{k} \geq \frac{i}{n} \iff n \geq k \quad).$$

Multiplikation über i liefert

$$\left(\frac{n}{k}\right)^k \leq \prod_{i=0}^{k-1} \frac{n-i}{k-i} = \frac{n(n-1)\cdot\ldots\cdot(n+1-k)}{k\cdot(k-1)\cdot\ldots\cdot 1} = \binom{n}{k}.$$

Außerdem

$$\binom{n}{k} \leq \frac{n^k}{k!} < \frac{n^k}{\left(\frac{k}{e}\right)^k} = \left(\frac{en}{k}\right)^k. \qquad \square$$

<u>Primzahlsatz 3.17.</u> Für $n \in \mathbb{N}$ setze

$$\pi(n) = \left|\{p \leq n : p \text{ ist Primzahl}\}\right|.$$

Dann gilt

$$\pi(n) \sim \int_2^n \frac{dt}{\log t} \sim \frac{n}{\log n}. \qquad \square$$

Inklusion - Exklusion.

Satz 3.18. Seien $n \in \mathbb{N}$ und $A_1, \dots, A_n$ endliche Mengen.

Dann

$$\left| \bigcup_{i \in [n]} A_i \right| = \sum_{k=1}^{n} (-1)^{k-1} \sum_{I \in [n]^k} \left| \bigcap_{i \in I} A_i \right| .$$

(Siebformel)

Bem. Die rechte Seite ist

$$|A_1| + \dots + |A_n| - (|A_1 \cap A_2| + |A_1 \cap A_3| + \dots\dots + |A_{n-1} \cap A_n|)$$
$$+ (|A_1 \cap A_2 \cap A_3| + \dots\dots + |A_{n-2} \cap A_{n-1} \cap A_n|)$$
$$- + \dots + (-1)^{n-1} |A_1 \cap \dots \cap A_n| .$$

Beweis. Wie oft wird $x \in A_1 \cup \dots \cup A_n$ auf der rechten Seite gezählt? Wenn $|\{i \in [n] : x \in A_i\}| = t$, wird x

Vertauschte Hüte.

Es sei S_n die Menge der Permutationen von ~~[redacted]~~$[n]$.
Man nennt $i \in [n]$ einen <u>Fixpunkt</u> von $\pi \in S_n$, wenn $\pi(i) = i$.
Es sei $D(n)$ die Anzahl der Fixpunktfreien Permutationen.

<u>Satz 3.19.</u> Für alle ~~$i \in [n]$~~ $n \in \mathbb{N}$ ist

$$\frac{D(n)}{n!} = 1 - \frac{1}{1!} + \frac{1}{2!} - + \dots + (-1)^n \cdot \frac{1}{n!}.$$

<u>Beweis.</u> Setze $A_i = \{ \pi \in S_n : \pi(i) = i \}$.

Für nicht-leere $I \subseteq [n]$ ist $\left| \bigcap_{i \in I} A_i \right| = (n - |I|)!$

Die Siebformel impliziert also

$$\left| \bigcup_{i \in [n]} A_i \right| = \sum_{k=1}^{n} (-1)^{k-1} \binom{n}{k} (n-k)!$$

$$\binom{t}{1} - \binom{t}{2} + \binom{t}{3} - + \dots + (-1)^{t-1}\binom{t}{t}$$

$$= 1 - \left(1 - \binom{t}{1} + \binom{t}{2} - + \dots + (-1)^{t}\binom{t}{t}\right)$$

$$= 1 - (1-1)^t = 1 - 0^t = 1$$

mal gezählt.

Bemerkung. Für jede Primzahl $p < \sqrt{n}$ sei A_p die Menge der Vielfachen von p, zwischen $\sqrt{n}$ und n. Dann ist die Anzahl der nicht-Primzahlen zwischen $\sqrt{n}$ und n

$$\left|\bigcup_p A_p\right| = \sum |A_p| - \sum_{p<q} |A_p \cap A_q| + - \dots$$

Man kann so versuchen, eine Formel für $\pi(n)$ zu finden.

$$= \sum_{k=1}^{n} (-1)^{k-1} \frac{n!}{k! \cancel{(n-k)!}} \cdot \cancel{(n-k)!}$$

$$= n! \left(\frac{1}{1!} - \frac{1}{2!} + \frac{1}{3!} - + \ldots + (-1)^{n-1} \frac{1}{n!} \right)$$

Daher

$$\frac{n! - D(n)}{n!} = \frac{1}{1!} - \frac{1}{2!} + \frac{1}{3!} - + \ldots + (-1)^{n-1} \frac{1}{n!}$$

Dies zeigt $\frac{D(n)}{n!} = 1 - \frac{1}{1!} + \frac{1}{2!} - + \ldots + (-1)^{n} \cdot \frac{1}{n!}$. $\square$

Da $\sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-1)^k}{k!} = e^{-1} = \frac{1}{e}$ folgt

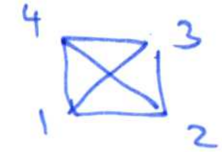
$$\lim_{n \to \infty} \frac{D(n)}{n!} = \frac{1}{e}.$$

§4. Graphentheorie.

Dfn. 4.1. Ein *Graph* ist ein Paar (V, E) das aus einer Menge V von *Ecken* und einer Menge E von *Kanten* besteht, wobei $E \subseteq V^{(2)}$.

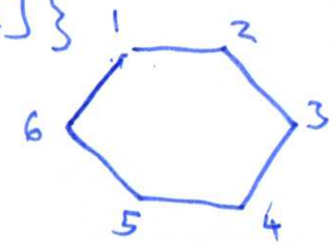
Bei uns ist V oft endlich.

Vollständige Graphen $K_n = ([n], [n]^{(2)})$



K_4

Kreise für $n \geq 3$ $C_n = ([n], \{\{i, i+1\} : i \in [n-1]\} \cup \{\{1, n\}\})$



C_6