§ 3. Zähltheorie.

3. Vorlesung

Funktionen und Teilmengen.

Bei uns ist $0^0 = 1$.

Lemma 3.1. Es seien M, N endliche Mengen. Dann gibt's genau $|M|^{|N|}$ Funktionen $f: N \to M$.

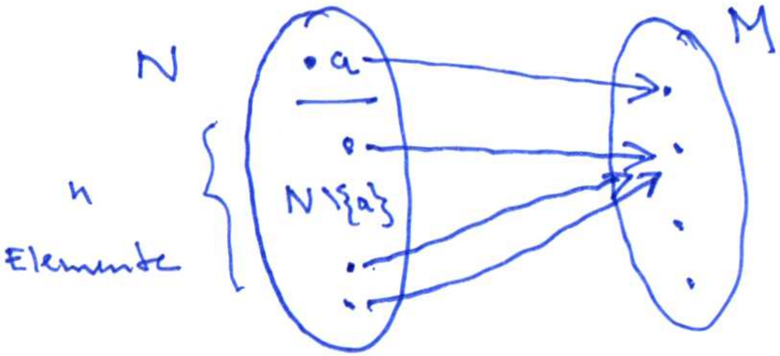
Erinnerung. Eine Funktion $f: N \to M$ ist das gleiche wie eine Menge $f \subseteq N \times M$ mit der Eigenschaft, dass für jedes $x \in N$ genau ein $y \in M$ existiert mit $(x, y) \in f$. (Man schreibt dann $y = f(x)$). Wenn $N = \emptyset$ ist $N \times M = \emptyset$ und $\emptyset$ ist die einzige Funktion von N nach M.

Beweis. Induktion nach $n = |N|$.

$n = 0$ | Nun $N = \emptyset$, siehe oben.

$\underline{n \to n+1}$ Sei $|N| = n+1$ und $a \in N$ beliebig.

Man kennt $f: N \to M$, wenn man $f(a)$ und $f|(N \setminus \{a\})$ kennt. Es gibt $|M|$ Möglichkeiten für $f(a)$ und nach Ind. Ann. gibt's $|M|^n$ Möglichkeiten für $f|(N \setminus \{a\})$. Also ist die gesuchte Zahl



$$|M| \cdot |M|^n = |M|^{n+1} = |M|^{|N|}. \qquad \square$$

__Lemma 3.2.__ Für jede endliche Menge X ist $|\mathcal{P}(X)| = 2^{|X|}$.

__Beweis.__ Für $A \subseteq X$ sei $\chi_A : X \to \{0,1\}$ die charakteristische Funktion, d.h.

$$\chi_A(x) = \begin{cases} 1 & \text{wenn } x \in A \\ 0 & \text{wenn } x \in X \setminus A. \end{cases}$$

Für jede Funktion $\chi : X \to \{0,1\}$ gibt's genau eine Menge $A \subseteq X$

mit $\chi = \chi_A$, nämlich $A = \{x \in X : \chi(x) = 1\}$.

Also

$$|\mathcal{P}(X)| = \text{Anzahl der Funktionen } \chi : X \to \{0,1\}$$

$$= 2^{|X|} \quad \text{(nach Lemma 3.1)}. \qquad \square$$

Bem.
$|\mathcal{P}(\mathbb{N})| = |\mathbb{R}|$

Lemma 3.3. Jede nichtleere endliche Menge X hat $2^{|X|-1}$ Teilmengen mit ungerader Mächtigkeit und $2^{|X|-1}$ Teilmengen mit gerader Mächtigkeit.

Beweis. Wähle $a \in X$ beliebig. Setze

$$\mathcal{G} = \{G \subseteq X \setminus \{a\} : |G| \text{ gerade}\}$$

$$\mathcal{U} = \{U \subseteq X \setminus \{a\} : |U| \text{ ungerade}\}.$$

Die geraden Teilmengen von X sind von der Form

$$G \quad (G \in \mathcal{G}) \qquad \text{oder} \qquad U \cup \{a\} \quad (U \in \mathcal{U}).$$

Somit ist die Anzahl der geraden Teilmengen von X

$$|\mathcal{G}| + |\mathcal{U}| = |\mathcal{G} \mathbin{\dot\cup} \mathcal{U}| = |\mathcal{P}(X \setminus \{a\})|$$

$$= 2^{|X \setminus \{a\}|} \quad \text{(nach Lemma 3.2)}$$

$$= 2^{|X|-1}.$$

Für ungerade Teilmengen geht der Beweis analog. $\square$

<u>Lemma 3.4.</u> Sind M, N endliche Mengen, so gibt's genau

$$\prod_{i=0}^{|N|-1} (|M| - i) = |M| \cdot (|M|-1) \cdot \ldots \cdot (|M| - (|N|-1))$$

injektive Funktionen von N nach M.

<u>Beweis.</u> Induktion nach $|N| = n$.

<u>$n = 0$</u> | Klar, da die leere Fkt. injektiv ist und das leere Produkt den Wert 1 hat.

<u>$n \to n+1$</u> Seien $|N| = n+1$, $a \in N$ bel. und $N' = N \setminus \{a\}$.

Bei einer injektiven Fkt $f: N \to M$ gibt's $|M|$ Möglichkeiten für $f(a)$ und wenn man $f(a)$ kennt ist $f|N'$ eine bel. inj. Fkt von N' nach $M \setminus \{f(a)\}$. Für $f|N'$ gibt's nach Ind. Ann. also

$$\prod_{i=0}^{|N'|-1} \left(|M \setminus \{f(a)\}| - i\right) = \prod_{i=1}^{|N|-1} \left((|M|-1) - (i-1)\right)$$

Möglichkeiten. Die gesuchte Zahl ist also

$$|M| \cdot \prod_{i=1}^{|N|-1} (|M|-i) = \prod_{i=0}^{|N|-1} (|M|-i). \qquad \square$$

Permutationen.

Dfn 3.5. Eine Permutation einer Menge X ist eine bijektive Abb. $f: X \to X$.

Erinnerung. $n! = \prod_{i=1}^{n} i = 1 \cdot 2 \cdot \ldots \cdot n$ heißt "n Fakultät".

Insbesondere $0! = 1$.

Lemma 3.6. Die Anzahl der Permutationen einer endlichen Menge X ist $|X|!$.

Beweis. Eine Fkt $f: X \to X$ ist genau dann bijektiv, wenn sie injektiv ist. Also

$$\text{Anzahl Permutationen} = \prod_{i=0}^{|X|-1} (|X| - i)$$

$$= |X| \cdot (|X| - 1) \cdot \ldots \cdot 1 = |X|!$$

$\square$

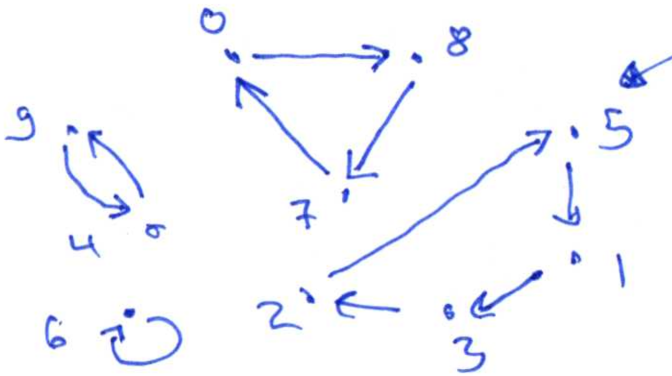
Zweizeilige Darstellung von Permutationen.

Wenn $X = \{a_1, \dots, a_n\}$ schreiben wir eine Permutation σ von X in der Form

$$\begin{pmatrix} a_1 & a_2 & \dots & a_n \\ \sigma(a_1) & \sigma(a_2) & \dots & \sigma(a_n) \end{pmatrix}.$$

Zyklenschreibweise.

Eine Permutation $\sigma : X \to X$ ist, insbesondere, eine Relation, die mit Pfeilen malen kann (wie in § 2). Dabei beginnt und endet in jedem Punkt genau ein Pfeil.



Diese Permutation schreiben wir als

$$(0\ 8\ 7)(1\ 3\ 2\ 5)(4\ 9)(6).$$

Binomialkoeffizienten.

Für $n, k \geq 0$ setzen wir

$$\binom{n}{k} = \frac{n(n-1)\cdot \ldots \cdot (n-(k-1))}{k!} = \frac{\prod_{j=0}^{k-1}(n-j)}{k!} \qquad (\text{"}n \text{ über } k\text{"})$$

Für $n \geq k$ ist im Zähler $\frac{n!}{(n-k)!}$, also

$$\binom{n}{k} = \frac{n!}{k!\,(n-k)!}.$$

Für $k > n$ ist im Zähler der Faktor $(n-n)$, also $\binom{n}{k} = 0$.

Für eine Menge X und $k \in \mathbb{N}_0$ setze

$$X^{(k)} = \binom{X}{k} = \{ Y \subseteq X : |Y| = k \}$$

__Lemma 3.7__ Für jede endliche Menge X und $k \geq 0$ ist

$$|X^{(k)}| = \binom{|X|}{k}.$$

<u>Beweis.</u> Setze $|X| = n$. Nach Lemma 3.4 gibt's

$\prod_{i=0}^{k-1} (n-i)$ injektive Funktionen $f : [k] \longrightarrow X$.

Für jede derselben ist $\mathrm{Bild}(f) = \{ f(i) : i \in [k] \}$

in $X^{(k)}$. Umgekehr gibt's zu jedem

$A \in X^{(k)}$ genau $k!$ injektive Funktion $f : [k] \longrightarrow A$.

Also
$$\prod_{i=0}^{k-1} (n-i) = |X^{(k)}| \cdot k! ,$$

d.h.
$$|X^{(k)}| = \binom{n}{k} .$$
$\square$

<u>Lemma 3.8.</u> Für alle $m \in \mathbb{N}_0$, $r \in \mathbb{N}$ ist

$$\left|\left\{(m_1, \dots m_r) \in \mathbb{N}_0^r : m_1 + \dots + m_r = m\right\}\right| = \binom{m+r-1}{r-1}.$$

<u>Beispiel.</u> $m = 2$, $r = 3$

$$\binom{2+3-1}{3-1} = \binom{4}{2} = 6$$

$2 = 2 + 0 + 0$	$\bullet\,\bullet\,|\,|$
$= 0 + 2 + 0$	$|\,\bullet\,\bullet\,|$
$= 0 + 0 + 2$	$|\,|\,\bullet\,\bullet$
$= 1 + 1 + 0$	$\bullet\,|\,\bullet\,|$
$= 1 + 0 + 1$	$\bullet\,|\,|\,\bullet$
$= 0 + 1 + 1$	$|\,\bullet\,|\,\bullet$

<u>Beweis.</u> Übersetze $m = m_1 + \dots + m_r$ in $\underbrace{\bullet\,\bullet \dots \bullet}_{m_1} \,|\, \underbrace{\bullet\,\bullet \dots \bullet}_{m_2} \,|\, \dots \,|\, \underbrace{\bullet \dots \bullet}_{m_r}$

Es gibt $r-1$ Striche und m Knödel, also $m+r-1$ Symbole und daher $\binom{m+r-1}{r-1}$ Möglichkeiten. $\square$