25. Vorlesung

$$\sum_{n=0}^{\infty} p(n)\, x^n = \prod_{k=1}^{\infty} \frac{1}{1-x^k}$$

Man kann $p(n) \sim \dfrac{e^{\sqrt{2n/3}\cdot\pi}}{4\sqrt{3}\cdot n}$ beweisen.

<u>Satz</u>. Für alle $n \in \mathbb{N}$ ist $p(n) < e^{\sqrt{2n/3}\,\pi}$.

<u>Beweis</u>. Wir wissen

$$p(n)\, x^n < \prod_{k=1}^{\infty} \frac{1}{1-x^k}$$

für alle $x \in (0,1)$. Also

$$\log p(n) + n \log x < \sum_{k=1}^{\infty} \log \frac{1}{1-x^k}.$$

Da $\log(1+y) = y - \frac{y^2}{2} + \frac{y^3}{3} - + \ldots$ für alle y mit $|y| < 1$

gilt ist $\log(1-x^k) = -x^k - \frac{x^{2k}}{2} - \frac{x^{3k}}{3} - \ldots,$

und folglich

$$\log p(n) + n \log x < \sum_{k=1}^{\infty} \sum_{m=1}^{\infty} \frac{x^{mk}}{m}$$

$$= \sum_{m=1}^{\infty} \frac{1}{m} \sum_{k=1}^{\infty} x^{mk}$$

$$= \sum_{m=1}^{\infty} \frac{1}{m} \cdot \frac{x^m}{1-x^m}.$$

Für alle $m \in \mathbb{N}$ gibt's nach Mittelwertsatz der Differentialrechnung ein $\xi_m \in (x, 1)$ mit

$$\frac{1-x^m}{1-x} = \frac{d x^m}{dx}\Big|_{x=\xi_m} = m \xi_m^{m-1} > m x^{m-1}.$$

Somit

$$\log p(n) + n \log x < \sum_{m=1}^{\infty} \frac{1}{m} \cdot \frac{x^m}{m(1-x) x^{m-1}}$$

$$= \sum_{m=1}^{\infty} \frac{1}{m^2} \cdot \frac{x}{1-x} = \frac{x}{1-x} \sum_{m=1}^{\infty} \frac{1}{m^2}$$

Nach Analysis II ist $\sum_{m=1}^{\infty} \frac{1}{m^2} = \frac{\pi^2}{6}$.

Insgesamt

$$\log p(n) + n \log x < \frac{\pi^2}{6} \cdot \frac{x}{1-x} \quad \text{für alle } x \in (0,1).$$

Substituiere $u = \frac{x}{1-x}$. Dann $1+u = \frac{1-x+x}{1-x} = \frac{1}{1-x}$,

also $1-x = \frac{1}{1+u}$, d.h. $x = \frac{u}{1+u}$.

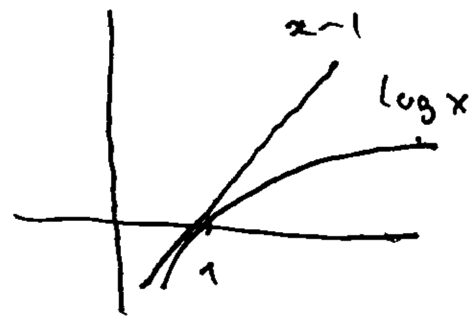
Daher gilt

$$\log p(n) + n \log \frac{u}{1+u} < \frac{\pi^2}{6} \cdot u \quad \text{für alle } u > 0.$$

Folglich

$$\log p(n) < \frac{\pi^2}{6} \cdot u + n \log \frac{1+u}{u}$$

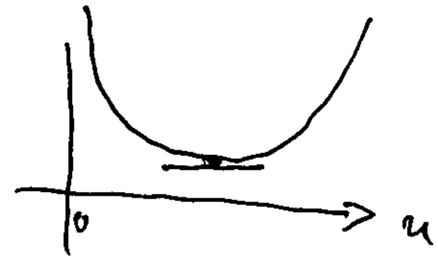
$$= \frac{\pi^2}{6} \cdot u + n \log\left(1 + \frac{1}{u}\right).$$



Wegen $\log(1+z) \leq z$ für alle $z > -1$

folgt $\log p(n) < \frac{\pi^2}{6} \cdot u + \frac{n}{u}$.

Bestimme nun $u > 0$ so, dass



$$g(u) = \frac{\pi^2}{6} \cdot u + \frac{n}{u}$$

minimal ist. Wegen $g'(u) = \frac{\pi^2}{6} - \frac{n}{u^2}$

ist

$$g'(u) = 0 \iff \frac{\pi^2}{6} = \frac{n}{u^2} \iff u = \frac{\sqrt{6n}}{\pi}.$$

also

$$\log p(n) < g\left(\frac{\sqrt{6n}}{\pi}\right) = \frac{\pi^2}{6} \cdot \frac{\sqrt{6n}}{\pi} + \frac{n\pi}{\sqrt{6n}}$$

$$= \frac{\pi}{\sqrt{6}} \cdot \sqrt{n} + \frac{\pi}{\sqrt{6}} \sqrt{n}$$

$$= \frac{2}{\sqrt{6}} \cdot \sqrt{n} \cdot \pi = \sqrt{2n/3} \cdot \pi,$$

d.h.

$$p(n) < e^{\sqrt{2n/3} \cdot \pi}.$$

$\square$

Satz. Für alle $n \in \mathbb{N}$ ist $p(n) > \dfrac{e^{2\sqrt{n}-5}}{n^2}$.

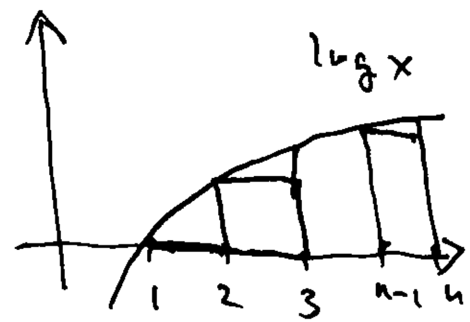
Insbesondere gibt's $n_0 \in \mathbb{N}$ mit

$$p(n) > e^{\sqrt{n}} \quad \text{für } n \geq n_0.$$

Fakt. Für alle $n \in \mathbb{N}$ ist $n! < en \cdot \left(\frac{n}{e}\right)^n$.

Beweis. Wegen

$$\begin{aligned}
\log(n-1)! &= \log 1 + \log 2 + \dots + \log(n-1) \\
&< \int_1^n \log x \, dx \\
&= x \log x - x \Big|_1^n \\
&= n \log n - n + 1
\end{aligned}$$



ist $(n-1)! < \dfrac{n^n}{e^{n-1}}$, also $n! < n \cdot \dfrac{n^n}{e^{n-1}} = en \cdot \left(\dfrac{n}{e}\right)^n$.

$\square$

Beweis des Satzes.

Betrachte $k \in [n]$. Die Anzahl der Lösungen von

$$n = a_1 + \dots + a_k \quad \text{mit} \quad a_1, \dots, a_k \in \mathbb{N} \quad \dots \quad (*)$$

ist $\binom{n-1}{k-1}$, denn: Die Gleichung $n = a_1 + \dots + a_k$ ist zu $n-k = (a_1 - 1) + \dots + (a_k - 1)$ äquivalent.

Nach Lemma 3.8 hat $n-k = b_1 + \dots + b_k$ genau $\binom{(n-k)+k-1}{k-1}$ Lösungen mit $b_1, \dots, b_k \in \mathbb{N}_0$.

Jede Partition $n = n_1 + \dots + n_k$ mit $n_1 \geq \dots \geq n_k \geq 1$ liefert höchstens $k!$ Lsgen von $(*)$. Somit

$$p(n) \geq \text{Anzahl der Partitionen von } n \text{ mit } k \text{ Summanden}$$

$$\geq \frac{1}{k!} \cdot \binom{n-1}{k-1}$$

Setze

$$h(k,n) = \frac{1}{k!}\binom{n-1}{k-1} = \frac{(n-1)(n-2)\cdot\ldots\cdot(n-k+1)}{k!\cdot(k-1)!}.$$

Wir wissen

$$p(n) \geq \max\{h(k,n) : 1 \leq k \leq n\}.$$

Um herauszufinden, wo das Maximum liegt, betrachten wir

$$\frac{h(k+1,n)}{h(k,n)} = \frac{(n-1)\cdot\ldots\cdot(n-k)}{(k+1)!\;k!}\cdot\frac{k!\,(k-1)!}{(n-1)\cdot\ldots\cdot(n-k+1)}$$

$$= \frac{n-k}{(k+1)k}.$$

Also

$$h(k+1,n) > h(k,n) \iff n-k > (k+1)k$$
$$\iff n > (k+2)k.$$

Es gibt also ein $k_0 \in [n]$ mit

$$h(1,n) < h(2,n) < h(3,n) < \ldots < h(k_0,n)$$

und $$h(k_0,n) > h(k_0+1,n) > \dots > h(n,n).$$

Dabei $n \approx k_0(k_0+2)$, d.h. $k_0 \approx \sqrt{n}$.

Setze $k_* = \lfloor \sqrt{n} \rfloor$. Wir wissen

$$p(n) \geq h(k_*,n) = \frac{(n-1)\cdot\ldots\cdot(n-k_*+1)}{k_*!\,(k_*-1)!}$$

Es gilt
$$(n-1)\cdot\ldots\cdot(n-k_*+1) \geq (n-k_*)^{k_*-1}$$
$$= n^{k_*-1}\cdot\left(1-\frac{k_*}{n}\right)^{k_*-1}$$
$$\geq n^{k_*-1}\cdot\left(1-\frac{1}{k_*}\right)^{k_*-1}$$

und wegen $\left(1-\frac{1}{m}\right)^{m-1} > \frac{1}{e}$ für alle $m \in \mathbb{N}$ folgt

$$(n-1)\cdot\ldots\cdot(n-k_*+1) \geq \frac{n^{k_*-1}}{e}.$$

also

$$p(n) > \frac{n^{k_*-1}}{e} \cdot \left(\frac{1}{k_*!}\right)^2$$

$$> \frac{n^{k_*-1}}{e} \left(\frac{1}{k_* e} \cdot \left(\frac{e}{k_*}\right)^{k_*} \right)^2 \quad \left(\begin{array}{c}\text{nach obigem} \\ \text{Fakt}\end{array} \right)$$

$$= \underbrace{\left(\frac{n}{k_*^2}\right)^{k_*}}_{\geq 1} \cdot \frac{1}{en} \cdot \left(\frac{e^{k_*-1}}{k_*} \right)^2$$

$$\geq \frac{1}{n k_*^2} \cdot e^{2k_* - 3} .$$

Wegen $\sqrt{n} - 1 \leq k_* \leq \sqrt{n}$ folgt

$$p(n) > \frac{1}{n^2} \cdot e^{2(\sqrt{n}-1)-3} = \frac{e^{2\sqrt{n}-5}}{n^2} . \qquad \square$$

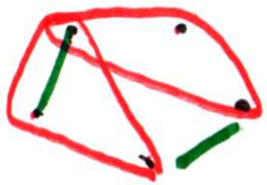
§ 13. Anwendungen der linearen Algebra.

Dfn 13.1. Man nennt $(V, \mathcal{B})$ mit $\mathcal{B} \subseteq V^{(3)}$ ein Steiner'sches Tripelsystem, wenn es für jedes Paar $\{x, y\} \in V^{(2)}$ genau ein $B \in \mathcal{B}$ gibt mit $\{x, y\} \in B$.

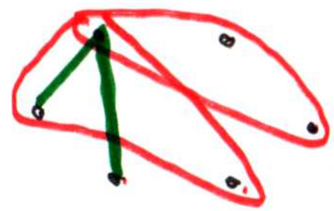
Beispiele.

$|V| = 3$ 

$|V| = 4$  gibt kein Steiner-System

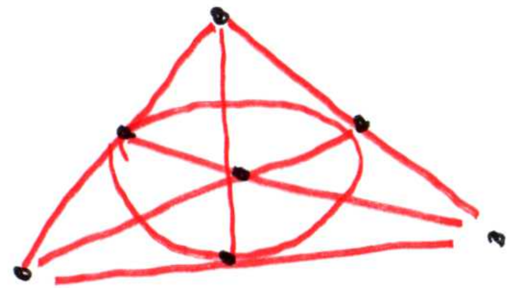
$|V| = 5$  — " —

$|V| = 6$



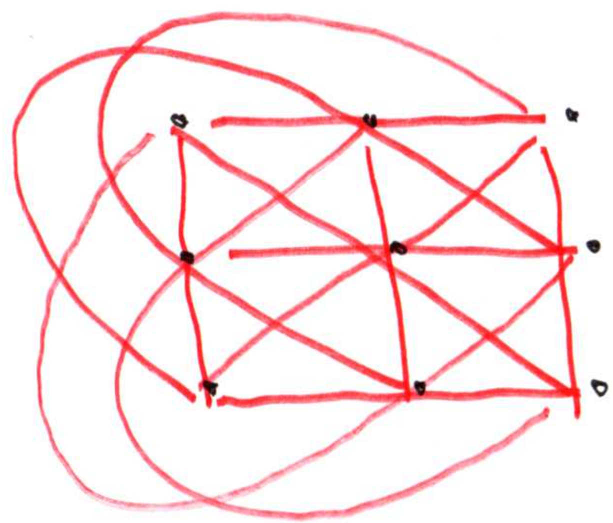
— II —

$|V| = 7$



Fano-Ebene.

$|V| = 9$



Affine Ebene über $\mathbb{F}_3$.

__Lemma 13.2.__ Wenn es ein Steiner'sches Tripel-System mit n Punkten gibt, muss $n \equiv 1 \pmod{6}$ oder $n \equiv 3 \pmod{6}$ sein.

<u>Beweis.</u> Es gebe ein STS $(V, \mathcal{L})$ mit $|V| = n$.

Sei x ein bel. Punkt. Die x enthaltenden Blöcke

liefern ein Matching auf $V \setminus \{x\}$.

Daher ist n ungerade, d.h.

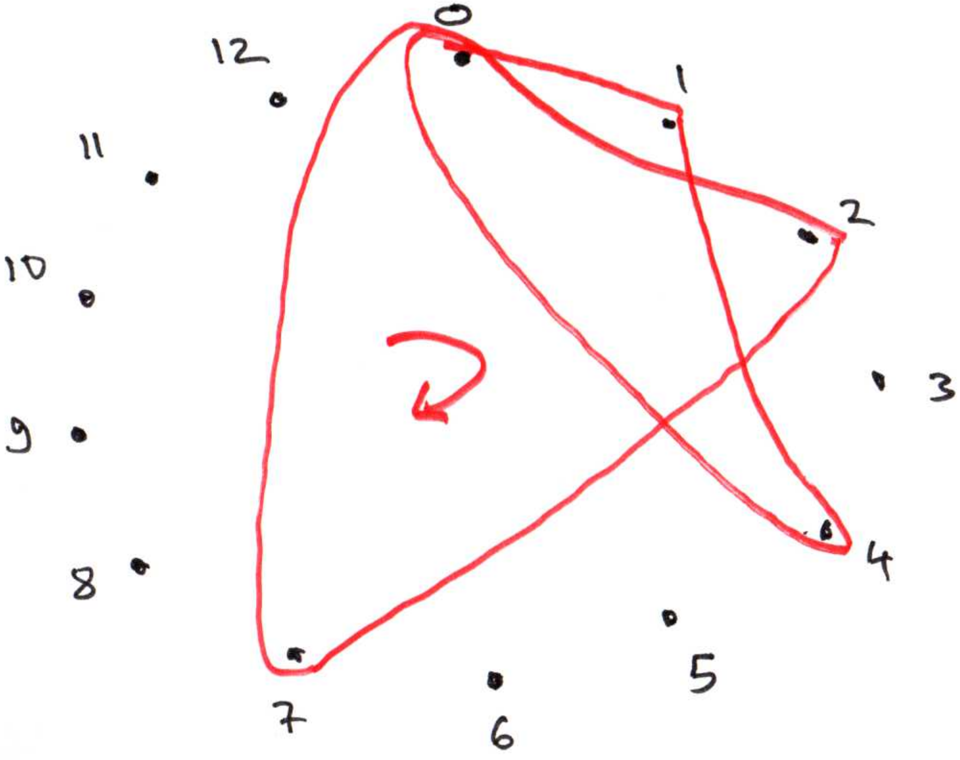
$n \equiv 1 \pmod{6}$, $n \equiv 3 \pmod{6}$ oder $n \equiv 5 \pmod{6}$.

Doppeltes Abzählen zeigt

$$3\,|\mathcal{L}| = \binom{n}{2} = \frac{n(n-1)}{2}.$$

Also ist $n(n-1)$ durch 3 teilbar. Dies schließt den Fall $n \equiv 5 \pmod{6}$ aus.

$n =$ 3	7	9	13	15	19	21	25	27	31
✓	✓	✓	✓	$2\cdot 7+1$	$2\cdot 9+1$	$2\cdot 7+7$	$2\cdot 9+7$	$2\cdot 13+1$	$2\cdot 15+1$



Lemma 13.3 Es gibt ein STS mit 13 Punkten.

Beweis. Die Punkte seien die Restklassen modulo 13. Betrachte alle Blöcke der Form $\{x, x+1, x+4\}$ und $\{x, x+2, x+7\}$.

Dies deckt alle Paare mit Abstand 1, 3, 4 bzw. 2, 5, 6 ab. $\square$

Beim nächsten Mal zeigen wir: Wenn es ein STS mit n Punkten gibt, dann gibt's auch eines mit $2n+1$ und eines mit $2n+7$ Punkten.