# 24. Vorlesung

Für alle $n \geq 2$ ist

$$K_n = K_1 \cdot K_{n-1} + K_2 \cdot K_{n-2} + \dots + K_{n-1} \cdot K_1$$

$$= \sum_{\nu=1}^{n-1} K_\nu K_{n-\nu}.$$

Warum? Für ein $\nu \in \{1, \dots, n-1\}$ stehen bei letzten Multiplikation $\nu$ Faktoren links und $n-\nu$ Faktoren rechts des Malpunktes. Es gibt $K_\nu \cdot K_{n-\nu}$ Möglichkeiten, die Terme links und rechts zu Klammern.

Beispiel.

$$K_4 = K_1 \cdot K_3 + K_2 \cdot K_2 + K_3 \cdot K_1$$

$$= 1 \cdot 2 + 1 \cdot 1 + 2 \cdot 1$$

$$= 5,$$

$$K_5 = K_1 \cdot K_4 + K_2 \cdot K_3 + K_3 \cdot K_2 + K_4 \cdot K_1$$

$$= 1 \cdot 5 + 1 \cdot 2 + 2 \cdot 1 + 5 \cdot 1 = 14$$

Setze $H(x) = K_1 x + K_2 x^2 + K_3 x^3 + \dots$

Dann

$$H(x)^2 = \sum_{n=1}^{\infty} K_n x^n \cdot \sum_{m=1}^{\infty} K_m x^m$$

$$= \sum_{m,n \geq 1} K_m K_n \cdot x^{m+n}$$

$$= \sum_{r=2}^{\infty} \left( \sum_{m=1}^{r-1} K_m K_{r-m} \right) x^r$$

$$= \sum_{r=2}^{\infty} K_r \cdot x^r = H(x) - x,$$

d.h.

$$H(x)^2 - H(x) + x = 0.$$

Die Lösungen der quadr. Gleichung sind

$$\frac{1 + \sqrt{1-4x}}{2} \quad \text{und} \quad \frac{1 - \sqrt{1-4x}}{2}.$$

Da $H(0) = 0$ muss

$$H(x) = \frac{1 - \sqrt{1-4x}}{2}$$

sein. Da

$$\sqrt{1+x} = (1+x)^{1/2} = \sum_{n=0}^{\infty} \binom{1/2}{n} x^n$$

für $|x| < 1$ gilt, ist

$$H(x) = \frac{1}{2}\left(1 - \sum_{n=0}^{\infty} \binom{1/2}{n} \cancel{x}(-4x)^n\right)$$

für $|x| < \frac{1}{4}$. Daher

$$H(x) = \frac{1}{2}\left(1 - 1 - \sum_{n=1}^{\infty} \binom{1/2}{n} (-4x)^n\right)$$

und

$$\boxed{K_n = -\frac{1}{2}\binom{1/2}{n}(-4)^n}$$

Beispiel.

$$K_4 = -\frac{1}{2}\cdot\binom{1/2}{4}(-4)^4 = -\frac{1}{2}\cdot 256\cdot\frac{\frac{1}{2}\cdot(-\frac{1}{2})(-\frac{3}{2})(-\frac{5}{2})}{24}$$

$$= 8\cdot\frac{15}{24} = 5$$

allgemein ist

$$K_n = -\frac{1}{2}\cdot(-1)^n\cdot 4^n\cdot\frac{\frac{1}{2}\cdot(-\frac{1}{2})(-\frac{3}{2})\cdot\ldots\cdot(\frac{3}{2}-n)}{n!}$$

$$= (-1)^{1+n+(n-1)}\cdot 2^{-1+2n-n}\cdot\frac{1\cdot 3\cdot 5\cdot\ldots\cdot(2n-3)}{n!}$$

$$= \underbrace{2^{n-1}}\cdot\frac{1\cdot 3\cdot 5\cdot\ldots\cdot(2n-3)}{n!}\cdot\frac{2\cdot 4\cdot 6\cdot\ldots\cdot(2n-2)}{\underbrace{2^{n-1}}\cdot(n-1)!}$$

$$= \frac{(2n-2)!}{n!\cdot(n-1)!} = \frac{1}{n}\cdot\frac{(2n-2)!}{(n-1)!\cdot(n-1)!} = \frac{1}{n}\binom{2n-2}{n-1}.$$

<u>Definition.</u> Für $n \geq 0$ heißt $C_n = \frac{1}{n+1}\binom{2n}{n}$ die $n^{\text{te}}$ Catalan-Zahl.

Die obige Darlegung zeigt:

<u>Lemma.</u> Für $n \geq 1$ kann man ein Produkt mit $n$ Faktoren auf $C_{n-1}$ Arten klammern.

Insbesondere ist $C_n \in \mathbb{N}$ für alle $n \in \mathbb{N}$.

| $n =$ 0 | 1 | 2 | 3 | 4 | 5 | 6 | ... |
|---|---|---|---|---|---|---|---|
| $C_n =$ 1 | 1 | 2 | 5 | 14 | 42 | 132 | ... |

$C_1 = \frac{1}{2}\binom{2}{1} = \frac{2}{2} = 1$ $\quad C_2 = \frac{1}{3}\binom{4}{2} = \frac{6}{3} = 2$

$C_3 = \frac{1}{4}\binom{6}{3} = \frac{20}{4} = 5$ $\quad C_4 = \frac{1}{5}\binom{8}{4} = \frac{70}{5} = 14$

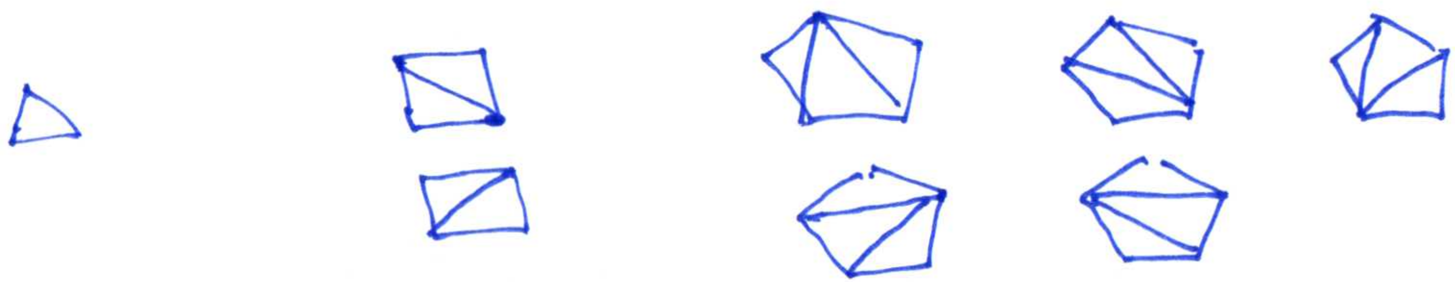
$C_5 = \frac{1}{6}\binom{10}{5} = \frac{252}{6} = 42$, $\quad C_6 = \frac{1}{7}\binom{12}{6} = \frac{924}{7} = 132$

Die Ganzzahligkeit von $C_n$ folgt auch aus

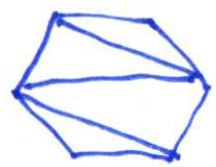
$$\binom{2n}{n} - \binom{2n}{n-1} = \frac{(2n)!}{n!\,n!} - \frac{(2n)!}{(n+1)!\,(n-1)!}$$

$$= \frac{(2n)!\,.\,[(n+1)-n]}{(n+1)!\,n!} = \frac{(2n)!}{(n+1)!\,n!} = C_n.$$

<u>Aufgabe.</u> Auf wie viele Arten kann man für $n \geq 3$ ein $n$-Eck triangulieren?



Sei $T_n$ die gesuchte Zahl.



| $n =$ 3 | 4 | 5 | 6 |
|---|---|---|---|
| $T_n =$ 1 | 2 | 5 | 14 (!) |

Vermutung: $T_n = C_{n-2}$

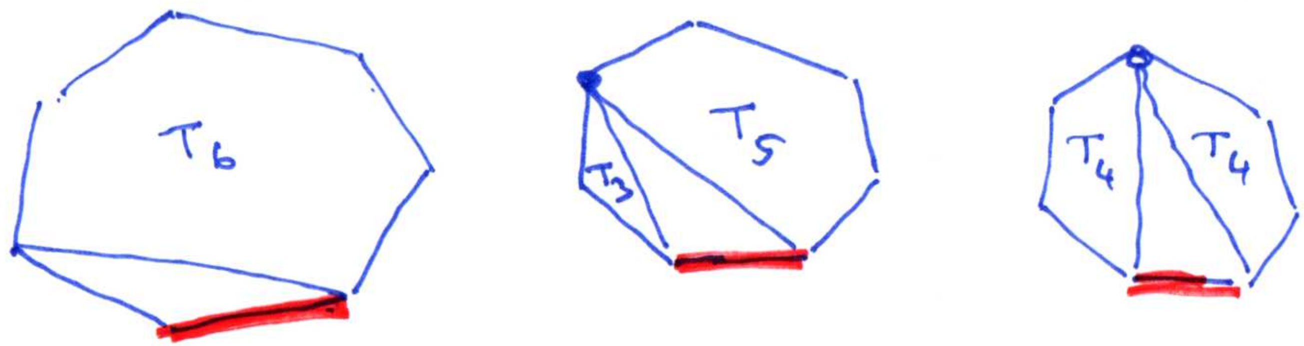
Genügt zu zeigen:

$$T_n = T_2 T_{n-1} + T_3 T_{n-2} + \dots + T_{n-1} T_2 \quad \text{(wobei } T_2 = 1\text{)}$$

$$C_{n-2} = C_0 C_{n-3} + C_1 C_{n-2} + \dots + C_{n-3} \cdot C_0 .$$

<u>Beispiel:</u> Warum ist

$$T_7 = T_2 \cdot T_6 + T_3 \cdot T_5 + T_4 \cdot T_4 + T_5 \cdot T_3 + T_2 \cdot T_6$$



# Partitionen.

Für $n \geq 1$ sei $p(n)$ die Anzahl der Möglichkeiten, $n = a_1 + \dots + a_m$ als Summe positiver ganzer Zahlen mit $a_1 \geq a_2 \geq \dots \geq a_m$ zu schreiben.

## Beispiele

| $n =$ | 1 | 2 | 3 | 4 | 5 |
|---|---|---|---|---|---|
| $p(n) =$ | 1 | 2 | 3 | 5 | 7 |

$1$

$2 = 1+1$

$3 = 2+1 = 1+1+1$

$$\begin{aligned} 4 &= 3+1 \\ &= 2+2 \\ &= 2+1+1 \\ &= 1+1+1+1 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} 5 &= 4+1 \\ &= 3+2 \\ &= 3+1+1 \\ &= 2+2+1 \\ &= 2+1+1+1 \\ &= 1+1+1+1+1 \end{aligned}$$

Man kann

$$p(n) \approx \frac{e^{\sqrt{2n/3}\cdot\pi}}{4\sqrt{3}\cdot n}$$

zeigen.

Euler betrachtete die erzeugende Funktion

$$P(x) = 1 + p(1)\cdot x + p(2)\cdot x^2 + p(3)\,x^3 + \ldots$$

$$\begin{aligned} &= (1 + x + x^2 + x^3 + x^4 + \ldots) \\ &\cdot (1 + x^2 + x^4 + x^6 + \ldots) \\ &\cdot (1 + x^3 + x^6 + x^9 + \ldots) \\ &\cdot (1 + x^4 + x^8 + x^{12} + \ldots) \\ &\cdot \ldots \end{aligned}$$

<u>denn:</u> Der Koeffizient von $x^4$ auf der rechten Seite

ist die Anzahl der Zahlenfolgen $a_1, a_2, a_3, \ldots \in \mathbb{N}_0$

mit $n = a_1 + 2a_2 + 3a_3 + 4a_4 + \ldots$

$$= \underbrace{1+\ldots+1}_{a_1} + \underbrace{2+\ldots+2}_{a_2} + \underbrace{3+\ldots+3}_{a_3} + \ldots,$$

Daher

$$P(x) = \frac{1}{1-x} \cdot \frac{1}{1-x^2} \cdot \frac{1}{1-x^3} \cdot \frac{1}{1-x^4} \cdot \ldots$$

$$= \frac{1}{\prod_{k=1}^{\infty}(1-x^k)}.$$

---

<u>Satz.</u> Für alle $n \geq 1$ ist $p(n) < e^{\sqrt{2n/3}\cdot\pi}$.

<u>Beweis.</u> Für alle $x \in (0,1)$ ist

$$\underline{p(n)\cdot x^n} < \sum_{m=0}^{\infty} p(m)\, x^m = P(x) = \underline{\prod_{k=1}^{\infty} \frac{1}{1-x^k}}.$$