§12. Erzeugende Funktionen

23. Vorlesung

Beispiel 1 Berechne $\sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} k$.

Wir wissen $$(1+x)^n = 1 + \binom{n}{1} x + \binom{n}{2} x^2 + \binom{n}{3} x^3 + \dots + \binom{n}{n} x^n.$$

Ableiten!

$$n(1+x)^{n-1} = \binom{n}{1} \cdot 1 + \binom{n}{2} 2x + \binom{n}{3} 3x^2 + \dots + \binom{n}{n} n x^{n-1}, \quad (*)$$

Setze $x=1$ ein.

$$n \cdot 2^{n-1} = \binom{n}{1} \cdot 1 + \binom{n}{2} \cdot 2 + \binom{n}{3} \cdot 3 + \dots,$$
$$= \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} \cdot k$$

Beispiel 2. Berechne $\sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} k^2$.

Aus $(*)$ folgt

$$n x (1+x)^{n-1} = \binom{n}{1} x + \binom{n}{2} \cdot 2x^2 + \binom{n}{3} \cdot 3x^3 + \dots + \binom{n}{n} n x^n,$$

Erneut ableiten!

$$n(1+x)^{n-1} + n x (n-1)(1+x)^{n-2}$$

$$= \binom{n}{1} \cdot 1^2 + \binom{n}{2} \cdot 2^2 x + \binom{n}{3} 3^2 x^2 + \dots + \binom{n}{n} \cdot n^2 x^{n-1}$$

Setze $x=1$ ein.

$$n 2^{n-1} + n(n-1) 2^{n-2} = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} k^2$$

Beispiel 3. In Lemma 3.11 zeigten wir die Formel

$$\binom{m+n}{k} = \sum_{i=0}^{k} \binom{m}{i} \binom{n}{k-i} \qquad \text{(Vandermonde-Faltung)}$$

Alternativ kann man so argumentieren:

$$(1+x)^m = \sum_{i=0}^{m} \binom{m}{i} x^i, \quad (1+x)^n = \sum_{j=0}^{n} \binom{n}{j} x^j$$

Wir multiplizieren

$$(1+x)^{m+n} = \sum_{i=0}^{m} \binom{m}{i} x^i \cdot \sum_{j=0}^{n} \binom{n}{j} x^j$$

$$= \sum_{i=0}^{m} \sum_{j=0}^{n} \binom{m}{i}\binom{n}{j} x^{i+j}$$

$$= \sum_{k=0}^{m+n} \left(\sum_{i=0}^{k} \binom{m}{i}\binom{n}{k-i} \right) x^k$$

Andererseits ist

$$(1+x)^{m+n} = \sum_{k=0}^{m+n} \binom{m+n}{k} x^k .$$

Durch Koeffizientenvergleich erhält man

$$\binom{m+n}{k} = \sum_{i=0}^{k} \binom{m}{i}\binom{n}{k-i} .$$

<u>Beispiel 4.</u> In Lemma 3.8 zeigten wir: Für gegebene m, r hat

$m_1 + \dots + m_r = m$ hat $\binom{m+r-1}{r-1}$ Lösungen

$(m_1, \dots, m_r) \in \mathbb{N}_0$.

Alternativ ist die Anzahl dieser Lösungen der Koeffizient von x^m in

$$\underbrace{(1+x+x^2+\dots)(1+x+x^2+\dots)\cdot\ldots\cdot(1+x+x^2+\dots)}_{r \text{ Faktoren}}$$

$$= \left(\frac{1}{1-x}\right)^r = (1-x)^{-r}.$$

In Analysis lernt man

$$(1+x)^\alpha = \sum_{n=0}^{\infty} \binom{\alpha}{n} x^n$$

für alle $\alpha \in \mathbb{R}$ und alle $x \in (-1,1)$, wobei $\binom{\alpha}{n} = \dfrac{\alpha(\alpha-1)\cdot\ldots\cdot(\alpha+1-n)}{n!}$

Für $\alpha = -r$ erhalten wir

$$(1+x)^{-r} = \sum_{n=0}^{\infty} \binom{-r}{n} x^n$$

und damit

$$(1-x)^{-r} = \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \binom{-r}{n} x^n .$$

Somit ist die Anzahl der Lösungen

$$(-1)^m \binom{-r}{m} .$$

Dabei

$$\binom{-r}{m} = \frac{(-r)(-r-1)\cdot \ldots \cdot (-r+1-m)}{m!}$$

$$= (-1)^m \cdot \frac{(r+m-1)\cdot \ldots \cdot (r+1)\cdot r}{m!}$$

$$= (-1)^m \binom{r+m-1}{m} .$$

Daher gibt's in der Tat $\binom{r+m-1}{m}$ Lösungen.

– Potenzreihen –

Für jede Folge $a_0, a_1, a_2, \ldots$ reeller Zahlen (oder komplexer Zahlen) kann man die erzeugende Funktion

$$f(x) = a_0 + a_1 x + a_2 x^2 + \ldots$$

betrachten. Wenn es eine Zahl $K > 0$ derart gibt, dass $|a_n| \leq K^n$ für alle hinreichend großen n gilt, dann konvergiert $f(x)$ für alle $x \in \left(-\frac{1}{K}, +\frac{1}{K}\right)$.

Für diese x gilt

$$f'(x) = a_1 + 2a_2 x + 3a_3 x^2 + \ldots,$$

<u>Beispiel:</u> Was ist die erzeugende Funktion der Quadratzahlen?

$$f(x) = 1 + 4x + 9x^2 + 16x^3 + 25x^4 + \cdots$$

$$= \frac{d}{dx}\left(x + 2x^2 + 3x^3 + 4x^4 + \cdots\right)$$

$$= \frac{d}{dx}\left(x\left(1 + 2x + 3x^2 + 4x^3 + \cdots\right)\right)$$

$$= \frac{d}{dx}\left(x \frac{d}{dx}\left(1 + x + x^2 + x^3 + \cdots\right)\right)$$

$$= \frac{d}{dx}\left(x \frac{d}{dx} \frac{1}{1-x}\right)$$

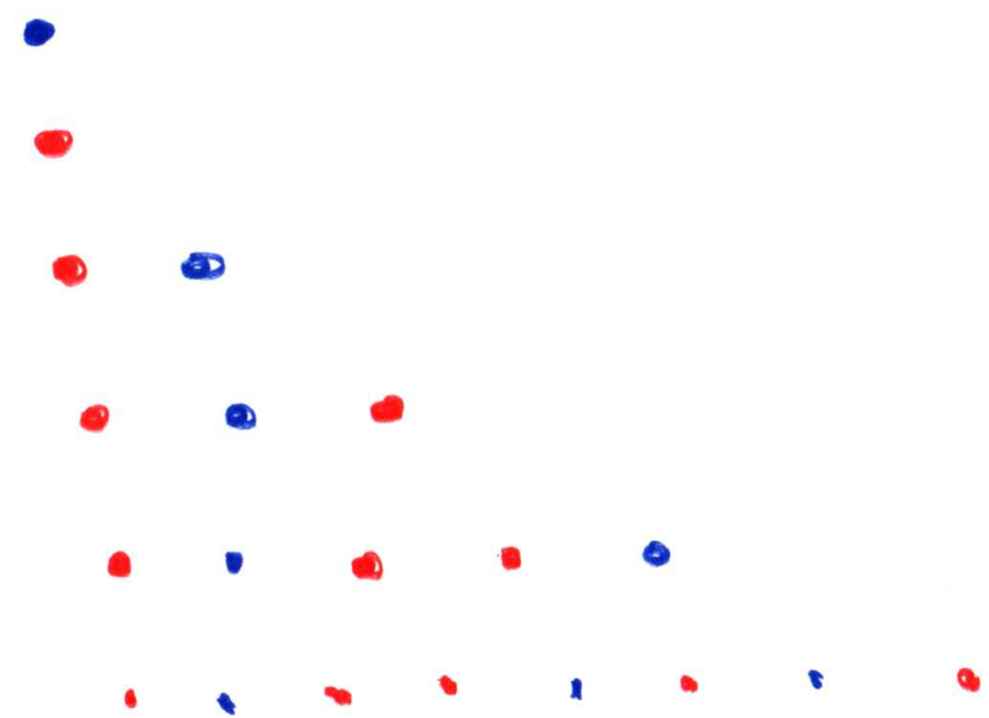
$$= \frac{d}{dx}\left(\frac{x}{(1-x)^2}\right)$$

$$= \frac{1}{(1-x)^2} + x \frac{2}{(1-x)^3}$$

$$= \frac{(1-x) + 2x}{(1-x)^3} = \frac{1+x}{(1-x)^3}.$$

Fibonacci - Zahlen.

Am Anfang hat man ein Hasenpäärchen.
Ein Hasenpäärchen braucht einen Monat, bis es "bereit" ist und produziert von da ab jeden Monat ein weiteres Päärchen. ~~B~~ Wieviele Hasenpäärchen hat man nach n Monaten?



$n = 1$ $\qquad F_1 = 1$

$n = 2$ $\qquad F_2 = 1$

$n = 3$ $\qquad F_3 = 2$

$n = 4$ $\qquad F_4 = 3$

$n = 5$ $\qquad F_5 = 5$

$n = 6$ $\qquad F_6 = 8$

Die Hasenpäärchen nach n Monaten sind F_n viele.

Dabei sind F_{n-1} bereit und F_{n-2} nicht.

Daher ist $F_n = F_{n-1} + F_{n-2}$.

$n =$	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12
$F_n =$	0	1	1	2	3	5	8	13	21	34	55	89	144

Um eine Formel für F_n zu finden, betrachten wir die erzeugende Funktion

$$F(x) = F_0 + F_1 x + F_2 x^2 + F_3 x^3 + F_4 x^4 + \ldots,$$

Es gilt

$$F(x) = F_0 + F_1 x + \sum_{n=2}^{\infty} (F_{n-1} + F_{n-2}) x^n$$

$$= x + x \sum_{n=2}^{\infty} F_{n-1} x^{n-1} + x^2 \sum_{n=2}^{\infty} F_{n-2} x^{n-2}$$

$$= x + x \cdot F(x) + x^2 \cdot F(x) .$$

Also

$$(1 - x - x^2)\, F(x) = x ,$$

d.h.

$$\boxed{F(x) = \frac{x}{1 - x - x^2}}$$

Die Nullstellen von $x^2 - x - 1$ sind $\frac{1 \pm \sqrt{5}}{2}$.

Setze $\lambda_1 = \frac{1+\sqrt{5}}{2}$, $\lambda_2 = \frac{1-\sqrt{5}}{2}$.

Nun ist

$$(1 - \lambda_1 x)(1 - \lambda_2 x) = 1 - (\lambda_1 + \lambda_2)\, x + \lambda_1 \lambda_2 x^2$$

$$= 1 - x - x^2 .$$

also

$$F(x) = \frac{x}{(1-\lambda_1 x)(1-\lambda_2 x)} = \frac{1}{\lambda_1 - \lambda_2} \left(\frac{1}{1-\lambda_1 x} - \frac{1}{1 - \lambda_2 x} \right)$$

$$= \frac{1}{\lambda_1 - \lambda_2} \left(\sum_{n=0}^{\infty} (\lambda_1 x)^n - \sum_{n=0}^{\infty} (\lambda_2 x)^n \right)$$

$$= \sum_{n=0}^{\infty} \frac{\lambda_1^n - \lambda_2^n}{\lambda_1 - \lambda_2} \, x^n$$

Durch Koeffizientenvergleich erhalten wir

$$F_n = \frac{\lambda_1^n - \lambda_2^n}{\lambda_1 - \lambda_2} ,$$

d.h.

$$\boxed{F_n = \frac{1}{\sqrt{5}} \left[\left(\frac{1+\sqrt{5}}{2} \right)^n - \left(\frac{1-\sqrt{5}}{2} \right)^n \right]}$$

(Binet - Formel)

__Problem:__ Auf wieviele Arten kann man ein Produkt mit n Faktoren klammern? Sei K_n die Anzahl der Möglichkeiten.

$n=1$ $\quad a_1$

$n=2$ $\quad a_1 a_2$

$n=3$ $\quad (a_1 a_2) a_3\ ,\ a_1 (a_2 a_3)$

$n=4$ $\quad (a_1\ a_2)\cdot(a_3\ a_4)$

$((a_1\ a_2)\ a_3)\cdot a_4$

$a_1\cdot(a_2\ (a_3\ a_4))$

$(a_1\ (a_2\ a_3))\cdot a_4$

$a_1\cdot((a_2\ a_3)\ a_4)$

$n =$	1	2	3	4	5
$K_n =$	1	1	2	5	