Lemma 11.5. Es seien $n, k \geq 3$ natürliche Zahlen. Wenn

$$2\binom{n}{k} < 2^{\binom{k}{2}}, \quad \text{dann} \quad R(k,k) > n.$$

Beweis. Es sei Ω die Menge der rot/grün-Färbungen der Kanten des K_n mit Eckenmenge $[n]$. Für jede Menge $M \in [n]^{(k)}$ und jede Farbe $\gamma \in \{\text{rot}, \text{grün}\}$ sei $\Omega_{M,\gamma}$ die Menge der Färbungen in Ω, bei denen ganz $M^{(2)}$ die Farbe γ hat.

Es gilt $|\Omega| = 2^{\binom{n}{2}}$ und $|\Omega_{M,\gamma}| = 2^{\binom{n}{2}-\binom{k}{2}}$.

Somit

$$\Big| \bigcup_{M \in [n]^{(k)}} \bigcup_{\gamma \in \{\text{rot}, \text{grün}\}} \Omega_{M,\gamma} \Big| \leq \sum_{M \in [n]^{(k)}} \sum_{\gamma \in \{\text{rot}, \text{grün}\}} |\Omega_{M,\gamma}|$$

$$\leq \binom{n}{k} \cdot 2 \cdot 2^{\binom{n}{2}-\binom{k}{2}} < 2^{\binom{k}{2}} \cdot 2^{\binom{n}{2}-\binom{k}{2}}$$

$$= 2^{\binom{n}{2}} = |\Omega|.$$

Also gibt's eine Färbung $\omega \in \Omega$ mit $\omega \notin \bigcup_{M \in [n]^{(k)}} \bigcup_{\gamma \in \{\text{rot}, \text{grün}\}} \Omega_{M,\gamma}$.

Diese Färbung hat keine einfarbige Clique der Ordnung k.

Sie zeigt also $R(k,k) > n$.

$\square$

<u>Satz 11.6 (Erdős)</u> Für alle $k \geq 3$ ist $R(k,k) > \sqrt{2}^{\,k}$.

<u>Beweis.</u> Nach Lemma 11.5 genügt es zu zeigen:

Wenn $n \leq \sqrt{2}^{\,k}$, dann $2\binom{n}{k} < 2^{\binom{k}{2}}$.

In der Tat ist $k! > 2^{k/2+1}$ und für $n \leq 2^{k/2}$ ist daher

$$2\binom{n}{k} \leq 2 \cdot \frac{n^k}{k!} < \frac{2^{k^2/2+1}}{2^{k/2+1}} = 2^{\frac{k^2}{2} - \frac{k}{2}} = 2^{\binom{k}{2}}.$$

$\square$

Zusammenfassung $\sqrt{2}^k < R(k,k) < 4^k$.

Niemand weiß, ob $\lim_{k\to\infty} \sqrt[k]{R(k,k)}$ existiert.

Außerdem ist weder bekannt, ob

$$\limsup_{k\to\infty} \sqrt[k]{R(k,k)} = 4$$

oder ob

$$\liminf_{k\to\infty} \sqrt[k]{R(k,k)} = \sqrt{2}\,.$$

gilt.

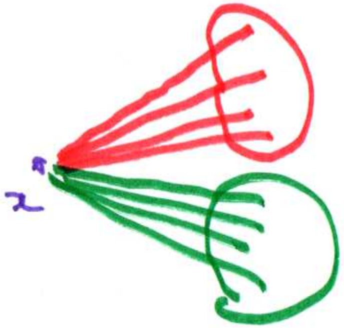
Man weiß $R(3,3) = 6$, $R(4,4) = 18$,

$R(5,5)$ ist nicht bekannt.

Satz 11.7 (Ramsey) Es sei X eine unendliche Menge. Für jede Färbung $f: X^{(2)} \longrightarrow \{\text{rot}, \text{grün}\}$ gibt's eine unendliche Menge $Y \subseteq X$, für die $Y^{(2)}$ einfarbig ist.

1. Beweis.

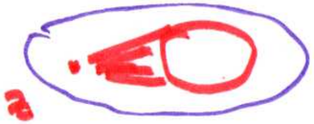
Für $x \in X$ sei $N_{rot}(x) = \{ y \in X \setminus \{x\} : f(\{x, y\}) = \text{rot} \}$.



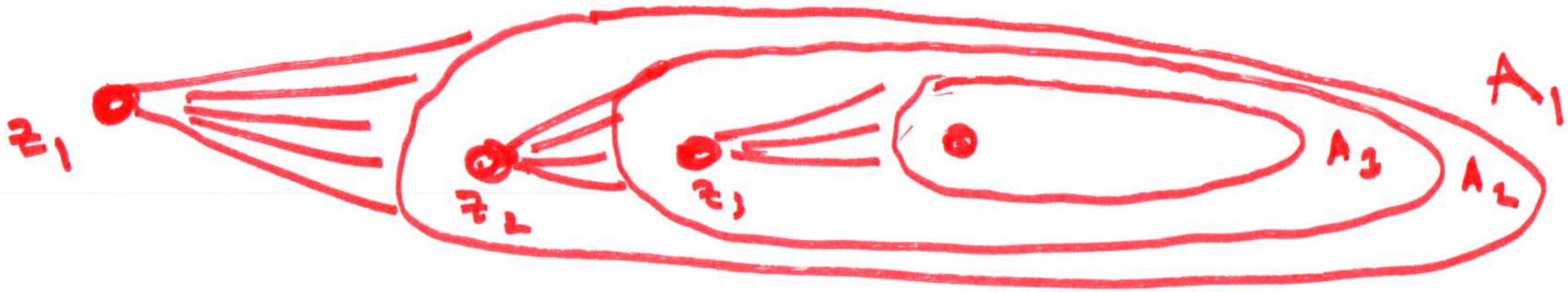
$N_{rot}(x)$

$N_{grün}(x)$

Fall 1: Für alle unendlichen $Z \subseteq X$ gibt's $z \in Z$ derart, dass $N_{rot}(z) \cap Z$ unendlich ist.



Z



Wir konstruieren folgendermaßen eine Folge $(z_n)_{n \in \mathbb{N}}$ von Elementen von X.

- z_1 wird so gewählt, dass $N_{rot}(z_1) = A_1$ unendlich ist. (Wende die Voraussetzung von Fall 1 auf $Z = X$ an).

- Seien $z_1, \ldots, z_k$ bereits gewählt und $A_k = N_{rot}(z_1) \cap N_{rot}(z_2) \cap \ldots \cap N_{rot}(z_k)$ sei unendlich. Wende "Fall 1" auf $Z = A_k$ an. Dies liefert $z_{k+1} \in A_k$, für die $A_k \cap N_{rot}(z_{k+1})$ unendlich ist.

Nun

$$A_k \cap N_{rot}(z_{k+1}) = N_{rot}(z_1) \cap \dots \cap N_{rot}(z_{k+1})$$

$$= A_{k+1}$$

Das beendet die Konstruktion. Nun ist

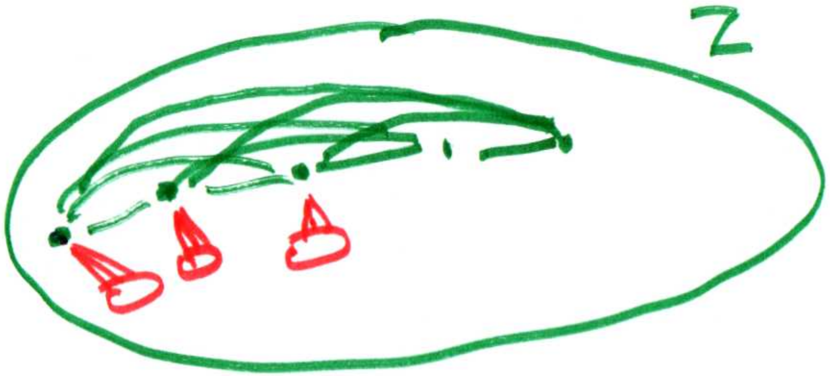
$Y = \{ z_k : k \in \mathbb{N} \}$ wie gewünscht, denn:

Wenn $i \leq k$, dann $z_{k+1} \in A_k \subseteq N_{rot}(z_i)$,

also $f(\{z_i, z_{k+1}\}) = rot$.

Somit ist $Y^{(2)}$ rot.

<u>Fall 2:</u> Es gibt eine unendliche Menge $Z \subseteq X$ derart, dass für alle $z \in Z$ die Menge $N_{rot}(z) \cap Z$ endlich ist.



Wir wollen rekursiv eine Folge $(z_n)_{n\in\mathbb{N}}$ wählen, für die $Y = \{ z_n : n \in \mathbb{N} \}$ eine grüne Clique induziert.

Es seien für ein $k \in \mathbb{N}$ die Elemente $z_1, \dots, z_k$ bereits gewählt. Da wir in Fall 2 sind, ist

$$N_{not}(z_i) \cap Z \text{ endlich für } i = 1, \dots, k.$$

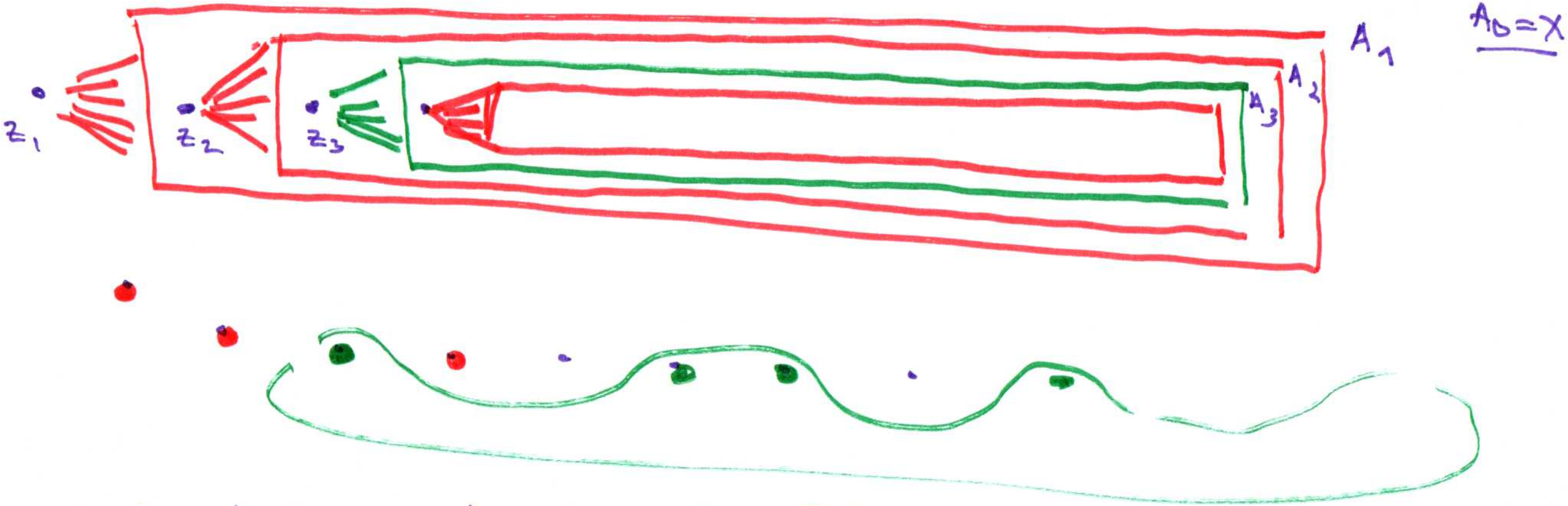
Somit ist

$$\bigcup_{1 \le i \le k} \left(N_{not}(z_i) \cap Z \right)$$

ebenfalls endlich. Es gibt also

$$z_{k+1} \in Z \setminus \left(\{ z_1, \dots, z_k \} \cup \bigcup_{1 \le i \le k} \left(N_{not}(z_i) \cap Z \right) \right)$$

Zweiter Beweis.



Wir konstruieren rekursiv eine Folge $(z_n)_{n\in\mathbb{N}}$ von Elementen von X und gleichzeitig eine Folge $(A_k)_{k\in\mathbb{N}_0}$ von unendlichen Teilmengen von X.

- Setze $A_0 = X$.
- Sei $k \in \mathbb{N}$ und $z_1, \dots, z_{k-1}, A_1, \dots, A_{k-1}$ seien bereits gewählt. Wähle $z_k \in A_{k-1}$ beliebig.

Da A_{k-1} unendlich ist, ist mindestens eine der beiden Mengen $N_{rot}(z_k) \cap A_{k-1}$ oder $N_{grün}(z_k) \cap A_{k-1}$ unendlich.

Wähle eine Farbe $\gamma(k) \in \{rot, grün\}$, für die

$$A_k = N_{\gamma(k)}(z_k) \cap A_{k-1}$$

unendlich ist.

Wir wissen $A_0 \supseteq A_1 \supseteq A_2 \supseteq A_3 \supseteq \ldots$

Für $k < m$ ist daher $z_m \in A_{m-1} \subseteq A_k$ und folglich $f(\{z_k, z_m\}) = \gamma(k)$.

Nach Schubfachprinzip gibt's eine Farbe $\gamma \in \{rot, grün\}$ und eine unendliche Menge A

mit $\gamma(k) = \gamma$ für $k \in A$.

Für $k < m$ mit $k, m \in A$ ist daher

$$f(\{z_k, z_m\}) = \gamma(k) = \gamma.$$

Also tut's $Y = \{z_k : k \in A\}$. $\square$

<u>Folgerung 11.8 (Ramsey)</u> Es sei Γ eine endliche Menge von Farben und X eine unendliche Menge. Für jede Färbung $f : X^{(2)} \longrightarrow \Gamma$ gibt's eine unendliche Menge $Y \subseteq X$, für die $Y^{(2)}$ einfarbig ist.

<u>Beweis.</u> Induktion nach $m = |\Gamma|$

<u>$m \leq 1$</u> klar.

<u>$m-1 \to m$</u> Sei $\gamma \in \Gamma$ beliebig. Nach Satz 11.7

tritt mind. einer der beiden folgenden Fälle ein:

(a) Es gibt eine unendliche Menge $Y \subseteq X$ derart, dass $Y^{(2)}$ einfarbig in Farbe γ ist.

(b) Es gibt eine unendliche Menge $Z \subseteq X$ derart, dass die Farbe γ nicht auf $Z^{(2)}$ nicht vorkommt.

Im Fall (a) sind wir direkt fertig und im Fall (b) wendet man die Ind. Ann. an. $\square$

<u>Satz 11.9 (Ramsey)</u> Sei X eine unendliche Menge. Für jede Färbung $f: X^{(3)} \longrightarrow \{\text{rot}, \text{grün}\}$ gibt's eine unendliche Menge $Y \subseteq X$ für die $Y^{(3)}$ einfarbig ist.

Beweis.