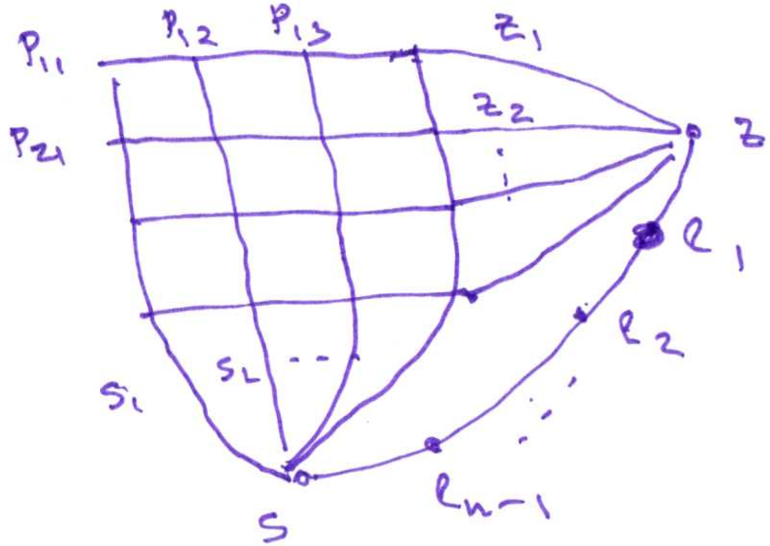
21. Vorlesung

$\Leftarrow$ Es gebe eine proj. Ebene $(X, \mathcal{L})$ der Ordnung n.

Es sei $U = \{l_1, \dots, l_{n-1}, s, z\} \in \mathcal{L}$ beliebig. Es seien $Z_1, \dots, Z_n$ die von U verschiedenen Geraden durch z und analog $S_1, \dots, S_n$ die von U verschiedenen Geraden durch s.



Für $i, j \in [n]$ sind die Geraden Z_i, S_j verschieden und folglich gibt's einen Punkt P_{ij} mit $Z_i \cap S_j = \{P_{ij}\}$.

Für $(i,j) \neq (i',j')$ ist $P_{ij} \neq P_{i'j'}$.

Für $k \in [n-1]$ seien $L_{k1}, \dots, L_{kn}$ die von U verschiedenen Geraden durch l_k.

Definiere die $n \times n$-Tabelle $L_k = (a_{ij}^{(k)})$ durch

$a_{ij}^{(k)}$ ist die Zahl $m \in [n]$ mit $P_{ij} \in L_{km}$.

<u>Ann:</u> Die Zahl m kommt in einer Zeile von L_k doppelt vor.

Wähle $i \in [n]$ und $j, j' \in [n]$ mit $j \neq j'$ und $a_{ij}^{(k)} = a_{ij'}^{(k)} = m$.

Nun $P_{ij}, P_{ij'} \in L_{km}$. Da auch $P_{ij}, P_{ij'} \in Z_i$ und $P_{ij} \neq P_{ij'}$ folgt $L_{km} = Z_i$. Die Punkte ℓ_k, z liegen auf dieser Geraden, also ist diese Gerade auch mit u identisch. <u>Wid</u>.

Also kommt jede Zahl in jeder Zeile von L_k genau einmal vor. Analog für Spalten. Daher sind die Quadrate $L_1, \ldots, L_{n-1}$ lateinisch. Es sind $k, k' \in [n-1]$ verschieden. Angenommen $L_k, L_{k'}$ wären nicht orthogonal. Dann gibt's $m, m' \in [n]$ und $(i,j), (i',j') \in [n] \times [n]$

mit $(i,j) \neq (i',j')$ und $a^{(k)}_{ij} = a^{(k)}_{i'j'} = m$, $a^{(k')}_{ij} = a^{(k')}_{i'j'} = m'$. Nun $P_{ij}, P_{i'j'} \in L_{km}$ und $P_{ij}, P_{i'j'} \in L_{k'm'}$. Da $P_{ij} \neq P_{i'j'}$ folgt $L_{km} = L_{k'm'}$. Auf diesen Geraden liegen die verschiedenen Punkte $\ell_k, \ell_{k'}$, d.h. sie ist mit U identisch, Wid. $\square$

Für $n \geq 2$ sei $M(n)$ die größte Anzahl paarweise orthogonaler lat. Quadrate. Man weiß

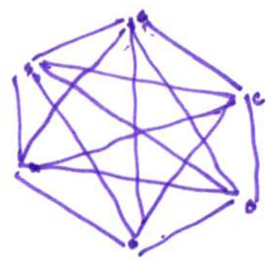
- $M(n) \geq 2$ wenn $n \neq 2, 6$,
- $M(6) = 1$,
- Ist p Primzahl und $\alpha \in \mathbb{N}$, dann $M(p^\alpha) = p^\alpha - 1$
- $M(mn) \geq \min(M(m), M(n))$
- $M(n) \geq \sqrt[15]{n}$ für alle hinr. großen n.

§ 10. Ramsey-Theorie.

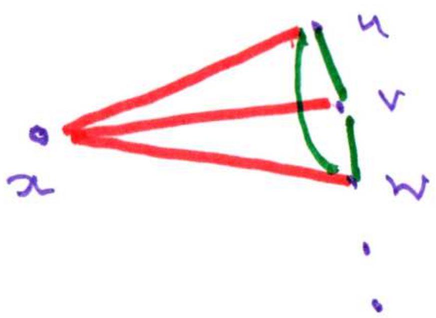
Satz 10.1. (Schubfachprinzip) Es seien $n_1, \dots, n_t$ natürliche Zahlen und X eine Menge mit $|X| > \sum_{i=1}^{t} (n_i - 1)$.
Werden die Elemente von X mit den Farben $1, 2, \dots, t$ gefärbt, dann gibt's eine Farbe $i \in [t]$ die mind. n_i mal vorkommt. $\square$

Satz 10.2. (Unendl. Schubfachprinzip) Es sei $t \in \mathbb{N}$.
Werden die Elemente einer unendl. Menge mit den Farben $1, \dots, t$ gefärbt, so kommt eine Farbe unendl. oft vor.

Satz 10.3. Werden die Kanten des K_6 mit den Farben rot/grün gefärbt, dann gibt's ein einfarbiges Dreieck.

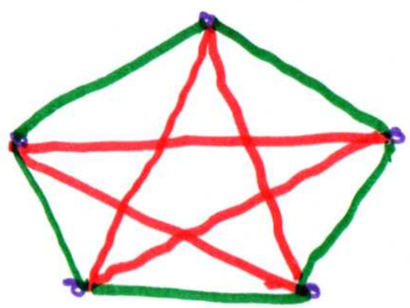


Beweis. Betrachte bel. Ecke x. Von den 5 Kanten,



die von x ausgehen, sind nach Schubfachprinzip drei gleichfarbig. OBdA seien xu, xv, xw rot. Wenn uv rot ist, ist xuv das gesuchte Dreieck. Also sei uv grün. Analog darf man annehmen, dass uw, vw grün sind. Nun ist uvw ein grünes Dreieck. $\square$

Bem. Mit 5 statt 6 ist das falsch.

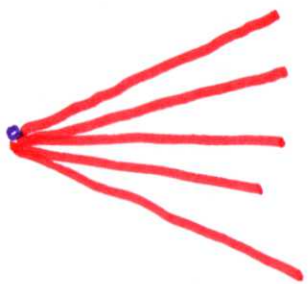


Satz 10.4. Es seien $s, t \geq 2$ und $n \geq \binom{s+t-2}{s-1}$ natürliche Zahlen. Werden die Kanten des K_n rot/grün gefärbt, dann gibt es einen roten K_s oder einen grünen K_t.

Beweis. Induktion nach $s+t$.

$s=2$ oder $t=2$ | Wenn $t=2$ ist $n \geq \binom{s}{s-1} = s$. Wenn es keinen grünen K_2 gibt, sind alle Kanten rot. Für $s=2$ ist $n \geq \binom{t}{1} = t$ und der Beweis geht analog.

Schritt | Sei $s, t \geq 3$ und die Behauptung gelte für alle Paare (s', t') mit $s'+t' < s+t$. Sei x bel. Ecke.

x 

Wenn x mind. $\binom{(s-1)+t-2}{(s-1)-1}$ rote Nachbarn hat, dann gibt's nach Ind. Ann. für $(s-1, t)$

einen roten K_{s-1} oder einen grünen K_t in der roten Nachbarschaft von x und wir sind fertig.

Wenn x höchstens $\binom{s+t-3}{s-2}-1$ rote Nachbarn hat, dann hat x mind.

$$
\begin{aligned}
&(n-1) - \left[\binom{s+t-3}{s-2} - 1\right] \\
\geq\ &\binom{s+t-2}{s-1} - \binom{s+t-3}{s-2} \\
=\ &\binom{s+t-3}{s-1} = \binom{s+(t-1)-2}{s-1}.
\end{aligned}
$$

Nach Ind. Ann. gibt's einen roten K_s oder einen grünen K_{t-1} in der grünen Nachbarschaft von x. In beiden Fällen sind wir fertig. $\square$

Es sei $R(s,t)$ die kleinste Zahl mit folgender Eigenschaft:

Werden die Kanten des $K_{R(s,t)}$ rot/grün gefärbt,

so gibt's einen roten K_s oder einen grünen K_t.

Nach Satz 10.3 und dem Beispiel danach ist $R(3,3) = 6$.

Aus Satz 10.4 folgt, dass $R(s,t)$ existiert und

$$R(s,t) \leq \binom{s+t-2}{s-1} .$$

Insbesondere

$$R(k,k) \leq \binom{2k-2}{k-1} \leq \sum_{i=0}^{i=2k-2} \binom{2k-2}{i} = 2^{2k-2}$$

$$< 4^k .$$