Orthogonale lat. Quadrate.

Dfn 9.9. Ein <u>lat. Quadrat der Ordnung n</u> ist eine $n \times n$ - Tabelle bei der in jeder Zeile und jeder Spalte die Zahlen $1, \dots, n$ stehen.

Beispiele.

$$\boxed{1} \qquad \begin{array}{|cc|} \hline 1 & 2 \\ 2 & 1 \\ \hline \end{array} \qquad \begin{array}{|ccc|} \hline 1 & 2 & 3 \\ 2 & 3 & 1 \\ 3 & 1 & 2 \\ \hline \end{array} \qquad \begin{array}{|cccc|} \hline 1 & 2 & 3 & 4 \\ 2 & 3 & 4 & 1 \\ 3 & 4 & 1 & 2 \\ 4 & 1 & 2 & 3 \\ \hline \end{array} \qquad \begin{array}{|cccc|} \hline 1 & 2 & 3 & 4 \\ 2 & 1 & 4 & 3 \\ 3 & 4 & 1 & 2 \\ 4 & 3 & 2 & 1 \\ \hline \end{array}$$

Bem 9.10. Es sei L ein lat. Quadrat der Ordnung n und $\pi \in S_n$ eine Permutation. Dann erhält man ein neues lat. Quadrat $\pi \cdot L$, indem man jeden Eintrag m von L durch $\pi(m)$ ersetzt.

Beispiel. $L = \begin{array}{|cccc|} \hline 1 & 2 & 3 & 4 \\ 2 & 1 & 4 & 3 \\ 3 & 4 & 1 & 2 \\ 4 & 3 & 2 & 1 \\ \hline \end{array}$, $\pi = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 3 & 1 & 2 & 4 \end{pmatrix}$, $\pi L = \begin{array}{|cccc|} \hline 3 & 1 & 2 & 4 \\ 1 & 3 & 4 & 2 \\ 2 & 4 & 3 & 1 \\ 4 & 2 & 1 & 3 \\ \hline \end{array}$

Dfn 9.11. Zwei lat. Quadrate L, L' der Ordnung n heißen <u>orthogonal</u> wenn es zu zwei gegeben Zahlen $a, b \in \{1, \ldots, n\}$ eine Zeile i und eine Spalte j derart gibt, dass in Zeile i und Spalte j bei L die Zahl a und bei L' die Zahl b steht.

Beispiel.

$$L = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 3 & 1 \\ 3 & 1 & 2 \end{bmatrix}, \quad L' = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 3 & 1 & 2 \\ 2 & 3 & 1 \end{bmatrix}$$

sind orthogonal.

11	22	33
23	31	12
32	13	21

Für welche n gibt's zwei orthogonale lat. Quadrate?

<u>$n=1$</u> $\boxed{1}$ $\boxed{1}$ ✓

<u>$n=2$</u> $\begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 1 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 2 \end{bmatrix}$ sind die einzigen lat. Quadrate d. Ordn. 2.

Sind $\begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 1 \end{bmatrix}$, $\begin{bmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 2 \end{bmatrix}$ orthogonal? $\begin{bmatrix} 12 & 21 \\ 21 & 12 \end{bmatrix}$ Nein.

Weder $\begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 1 \end{bmatrix}$ noch $\begin{bmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 2 \end{bmatrix}$ ist zu sich selbst orthogonal.

$$\begin{bmatrix} 11 & 22 \\ 22 & 11 \end{bmatrix} \qquad \begin{bmatrix} 22 & 11 \\ 11 & 22 \end{bmatrix}$$

Also: Es gibt keine zwei orthogonalen lat. Quadrate,

$n = 3, 4, 5$: ja

$n = 6$: nein.

Heute weiß man: Für alle $n \neq 2, 6$ gibt's zwei orthogonale lat. Quadrate der Ordnung n.

Offene Frage: Gibt's drei paarw. orthogonale lat. Quadrate der Ordnung 10?

Bem. 9.12. Sind L, L' orthogonale lat. Quadrate der Ordnung n und $\pi, \pi' \in S_n$ Permutationen, dann sind $\pi L, \pi' L'$ ebenfalls orthogonal.

Beweis. Seien $a, b \in [n]$ gegeben. Da L, L' orthogonal sind, gibt's i, j derart, dass $L_{ij} = \pi^{-1}(a)$ und $L'_{ij} = \pi'^{-1}(b)$. Dann $(\pi L)_{ij} = a$, $(\pi' L')_{ij} = b$.

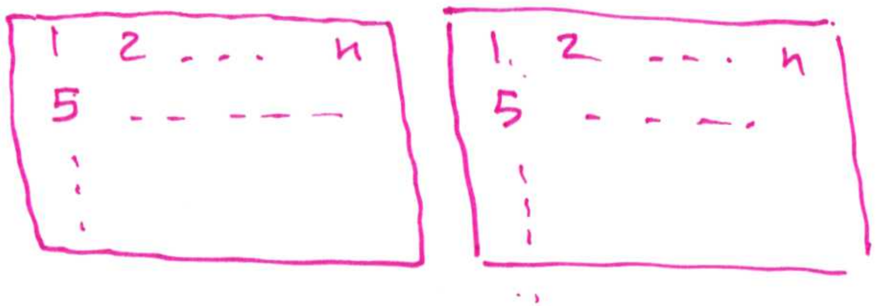
Satz 9.13. Es seien $n \geq 2$ und $\mathfrak{M}$ eine Menge paarweise orthogonaler lat. Quadrate der Ordnung n. Dann $|\mathfrak{M}| \leq n-1$.

Beweis. Es seien $L_1, \dots, L_k$ paarw. orth. lat. Quadrate der Ordnung n. OBdA stehen in der ersten Zeile jedes Quadrates die Zahlen $1, 2, \dots, n$ in der richtigen Reihenfolge.

Beim Quadrat L_i stehe in der zweiten Zeile und ersten Spalte die Zahl a_i.

Es gilt $a_1, \dots, a_k \in \{2, 3, \dots, n\}$. (betrachte die 1. Spalte!)

Für $i \neq j$ ist $a_i \neq a_j$, denn: Das Paar (a_i, a_i)

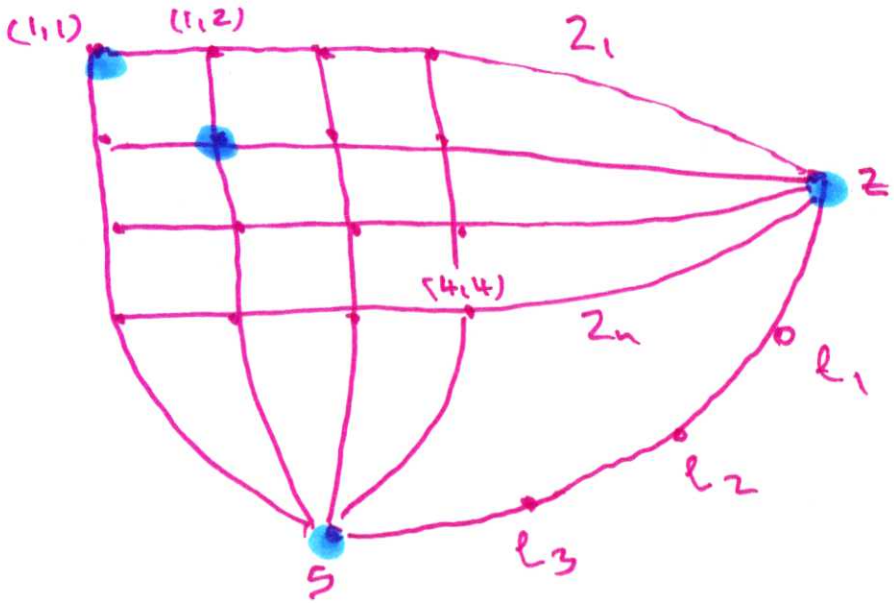


kommt bereits in der ersten Zeile vor. Also

$$k = |\{a_1, \dots, a_k\}| \leq |\{2, \dots, n\}| = n-1.$$

Satz 9.14. Für $n \geq 2$ gibt's genau dann $n-1$ paarw. orthogonale ~~verschiedene~~ lat. Quadrate der Ordnung n, wenn es eine proj. Ebene der Ordnung n gibt. $\square$

Beweis. $\Rightarrow$) Es seien $L_1, \dots, L_{n-1}$ paarw. orthogonale Quadrate d. Ordnung n. Bei L_k stehe in Zeile i und Spalte j die Zahl $a_{ij}^{(k)}$.



Setze $X = [n] \times [n] \cup \{l_1, \dots, l_{n-1}, s, z\}$.

Die Geraden unserer proj. Ebene mit Punktmenge X sind

- $Z_i = \{(i,1), \dots, (i,n), z\}$

  $S_j = \{(1,j), \dots, (n,j), s\}$

  für $i \in [n]$, $j \in [n]$.

- $\mathcal{U} = \{l_1, \dots, l_{n-1}, s, z\}$

- $L_{km} = \{l_k\} \cup \{(i,j) : a_{ij}^{(k)} = m\}$

  für $k \in [n-1]$, $m \in [n]$

Es sei $\mathcal{L}$ die Menge dieser Geraden. Nun ist $(X, \mathcal{L})$ eine proj. Ebene, denn:

$\boxed{P0}$ Betrachte $F = \{(1,1), (2,2), s, z\}$.

$\boxed{P1}$ z.z. Je zwei Geraden schneiden sich in genau einem Punkt. $\boxed{7}$

- Seien $L, L' \in \mathcal{L}$ verschieden.
  - Wenn $\mathcal{U} \in \{L, L'\}$ ist die Beh. klar.
  - Wenn $L, L' \in \{Z_1, \dots, Z_n, S_1, \dots, S_n\}$ auch.
  - Sei $L = Z_i$ und $L' = L_{km}$.

    $|L \cap L'| = 1$ da in Zeile i von L_k die Zahl m genau einmal vorkommt.

  - Analog $|S_j \cap L_{km}| = 1$.
  - Sei $L = L_{km}$, $L' = L_{k'm'}$.

    Wenn $k = k'$ ist $m \neq m$ und $L \cap L' = \{\ell_k\}$.

    Wenn $k \neq k'$ liegt $|L \cap L'| = 1$ an der Orthogonalität von L_k, $L^*_{k'}$.

Zu je zwei Punkten gibt es genau eine Gerade, die beide enthält.

Wenn mind. einer der beiden Punkte $\ell_1, \dots, \ell_{n-1}, s$ oder z ist, ist dies klar.

Betrachte nun zwei verschiedene $(i,j), (i',j')$.

Wenn $i = i'$ liegen sie auf Z_i, wenn $j = j'$ auf S_j.

Sei nun $i \neq i'$, $j \neq j'$.

Angenommen es gäbe zwei verschiedene Geraden $L_{km}, L_{k'm'}$ mit $(i,j), (i',j') \in L_{km} \cap L_{k'm'}$. Dann $a_{ij}^{(k)} = a_{i'j'}^{(k)} = m$ und $a_{ij}^{(k')} = a_{i'j'}^{(k')} = m'$. Wenn $k = k'$, dann $m = m'$, Wid. Also $k \neq k'$. Die Kombination (m, m') steht an den verschiedenen Positionen $(i,j), (i',j')$ von

$L_k, L_{k'}$. Wid. (zur Orthogonalität).

Damit ist gezeigt: Zu je zwei verschiedenen Punkten $x, x' \in X$ gibt's höchstens eine Gerade $L \in \mathcal{L}$ mit $x, x' \in L$.

Für verschiedene Punkte $x, x' \in X$ setze

$$a(x, x') = |\{L \in \mathcal{L} : x, x' \in L\}|.$$

Nun ist

$$\sum_{\{x,x'\} \in X^{(2)}} a(x, x') = \sum_{L \in \mathcal{L}} \binom{|L|}{2} = (n^2+n+1) \cdot \binom{n+1}{2}$$

$$= \frac{1}{2}(n^2+n+1) \cdot (n+1)n$$

$$= \binom{n^2+n+1}{2} = \binom{|X|}{2}$$

Da $a(x, x') \leq 1$ für alle $\{x, x'\} \in X^{(2)}$ ist

$$\sum_{\{x,x'\}} a(x, x') \leq \binom{|X|}{2}$$ wobei Gleichheit nur

dann gilt, wenn $a(x, x') = 1$ für alle $\{x, x'\} \in X^{(2)}$.

Insgesamt gibt es also zu je zwei Punkten genau eine Gerade. $\square$