2. Vorlesung.

Ordnungen und lineare Ordnungen.

Dfn 2.5. Sei $(X, \leq)$ eine geordnete Menge. Man nennt $a \in X$

(a) ein minimales Element, wenn's kein $x \in X$ mit $x < a$ gibt,

(b) das kleinste Element von X, wenn $\forall x \in X$ $a \leq x$.

Maximale und größte Elemente sind analog definiert.

Bem. • Es kann mehrere minimale Elemente geben. Z.B. ist in $(\mathbb{N} \setminus \{1\}, \mid)$ jede Primzahl minimal.

• Im allg. muss es weder minimale noch kleinste Elemente geben.

• Je zwei kleinste Elemente sind gleich (denn: Sind a, a' kleinste Elemente, dann $a \leq a'$, $a' \leq a$, also $a = a'$).

<u>Satz 2.6.</u> Jede (nichtleere) endliche geordnete Menge hat mind. ein minimales und mind. ein maximales Element.

<u>Beweis.</u> Sei $(X, \leq)$ eine nicht leere, endliche geordnete Menge.

Gilt $x_1 < x_2 < \dots < x_k$ für $k \in \mathbb{N}$ und $x_1, \dots, x_k \in X$, dann sind $x_1, \dots, x_k$ paarweise verschieden, also $k \leq |X|$.

Also gibt's ein größtes $k \in \mathbb{N}$, für das $x_1, \dots, x_k \in X$ mit $x_1 < \dots < x_k$ existieren. Nun ist x_1 minimal, denn:

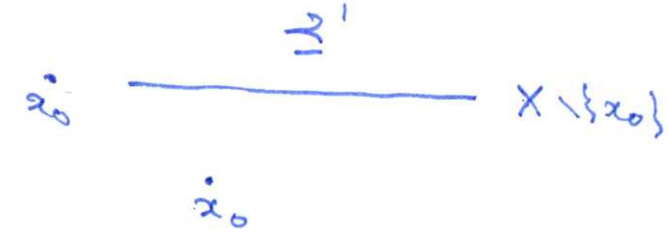
Sonst gäbe es $x_0 < x_1$. Da $x_0 < \dots < x_k$ widerspricht $k+1$ der Maximalität von k.

Analog ist x_k maximal. $\square$

Satz 2.7. Ist $(X, \leq)$ eine endliche geordnete Menge, so gibt's eine lineare Ordnung $\precsim$ auf X mit $\leq \subseteq \precsim$, d.h.

$$\forall x, y \in X \quad x \leq y \Longrightarrow x \precsim y.$$

Beweis Induktion nach $|X|$.



$|X| \leq 1$) Trivial (setze $\precsim \; = \; \leq$).

Schritt) Sei nun $|X| > 1$. Nach Satz 2.5 gibt's minimales Element $x_0 \in X$. Setze $X' = X \setminus \{x_0\}$. Da $|X'| < |X|$ gibt's nach Ind. Ann. lin Ordnung $\precsim'$ auf X' mit $(\leq \cap X'^2) \subseteq \precsim'$.

Setze $\precsim \; = \; \precsim' \cup \{(x_0, x) : x \in X\}$.

Dies tut's. (!) $\square$

<u>Bem.</u> Der Satz stimmt auch für unendl. partielle Ordnungen $(X, \leq)$

Das kann man aber nicht ohne Auswahlaxiom beweisen.

Grob gesagt geht der Beweis so:

Betrachte

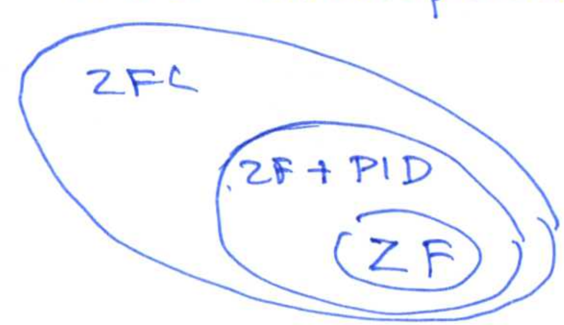
$$\mathfrak{Z} = \{ \leq^* \;:\; (X, \leq^*) \text{ ist geordnete Menge und } \leq \,\subseteq\, \leq^* \}.$$

Nach Zorn'schem Lemma gibt's ein maximales $\preceq \in \mathfrak{Z}$.

Das tut's, denn: Angenommen für $x, y \in X$ gilt weder $x \preceq' y$ noch $y \preceq x$. Setze

$$\preceq' = \preceq \cup \{ (a,b) : a \preceq x \text{ und } y \preceq b \}$$

Dann $x \preceq' y$, $\preceq' \in \mathfrak{Z}$. Also widerspricht $\preceq'$ der maximalen Wahl von $\preceq$.



Die Teilmengenrelation

Dfn 2.8. Eine Einbettung von einer geordneten Menge $(X, \leq)$ in eine geordnete Menge $(X', \leq')$ ist eine Funktion $f: X \to X'$ mit

$$\forall x, y \in X \qquad f(x) \leq' f(y) \leftrightarrow x \leq y.$$

Beispiele.
- Seien $(X, \leq)$ eine geordnete Menge und $Y \subseteq X$. Dann ist $y \mapsto y$ Einbettung von $(Y, \leq \cap Y^2)$ nach $(X, \leq)$.
- $n \mapsto 2^n$ ist Einbettung von $(\mathbb{N}, \leq)$ nach $(\mathbb{N}, |)$.

Bem. Einbettungen sind immer injektiv, denn: Sei $f(x) = f(y)$. Da $f(x) \leq f(y)$ und $f(y) \leq f(x)$ ist $x \leq y$, $y \leq x$. Also $x = y$.

<u>Satz 2.9.</u> Für jede geordnete Menge $(X, \leq)$ existiert Einbettung in $(\mathcal{P}(X), \subseteq)$.

<u>Beweis.</u> Für $x \in X$ setze $f(x) = \{y \in X : y \leq x\}$.

Dies tut's, ~~denn~~:

Wenn <u>$x \leq x'$</u>, dann <u>$f(x) \subseteq f(x')$</u>, da für alle $y \in f(x)$ gilt $y \leq x \leq x'$, d.h. $y \leq x'$, d.h. $y \in f(x')$.

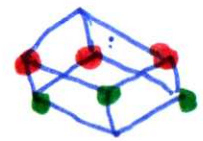
Wenn $f(x) \subseteq f(x')$, dann $x \in f(x)$, also $x \in f(x')$, d.h. $x \leq x'$. $\square$

<u>Groß heißt lang oder dick</u>

<u>Dfn 2.10.</u> Sei $P = (X, \leq)$ eine geordnete Menge. Man nennt $A \subseteq X$ eine <u>Antikette</u> oder <u>unabhängige Menge</u>, wenn es keine verschiedenen $x, y \in A$ mit $x \leq y$ gibt.

Setze $\alpha(P) = \max\{\,|A| : A \subseteq X \text{ ist Antikette}\,\}$.

<u>Beispiele.</u>

- Für lineare Ordnungen P gilt $\alpha(P) = 1$.
- $\alpha($  $) = 3$ (!)

<u>Beob. 2.11.</u> Sei $(X, \leq)$ geordnete Menge,

$$A = \{\, a \in X : a \text{ minimal} \,\}.$$

Dann ist A Antikette.

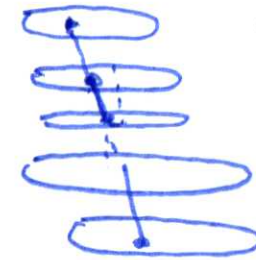
<u>Beweis.</u> Sonst gäbe $a, a' \in A$, $a \neq a'$, $a \leq a'$.
Aber $a < a'$ widerspricht der Minimalität von a'. $\square$

<u>Dfn 2.12.</u> Es sei $P = (X, \leq)$ eine geordnete Menge.
Man nennt $K \subseteq X$ eine <u>Kette</u> wenn $\forall x, y \in K.\ (x \leq y \vee y \leq x)$.
Setze $w(P) = \max\{\,|K| : K \subseteq X \text{ ist Kette}\,\}$.

Satz 2.13. Für jede endl. geordnete Menge $P = (X, \le)$ gilt

$$\alpha(P) \cdot \omega(P) \ge |X|.$$

Beweis. Definiere rekursiv $A_1, A_2, \dots \subseteq X$ so:



$$A_1 = \{x \in X : x \text{ minimal in } X\}$$

$$A_2 = \{x \in X : x \text{ minimal in } X \setminus A_1\}$$

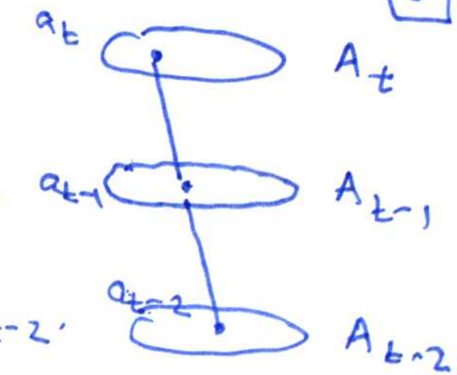
$$\vdots$$

$$A_i = \{x \in X : x \text{ minimal in } X \setminus (A_1 \cup \dots \cup A_{i-1})\}$$

$$\vdots$$

Da $A_1, A_2, \dots$ paarweise disjunkte Teilmengen von X sind, gibt's maximales t mit $A_t \neq \emptyset$. Dann $A_{t+1}, \dots = \emptyset$ und $X = A_1 \dot\cup \dots \dot\cup A_t$. Da A_i unabh. ist für $i \in [t]$ (nach Beob. 2.11) folgt $|X| \le t \cdot \alpha(P)$. Also genügt's $t \le \omega(P)$ zu zeigen.

Wähle dann $a_t \in A_t$ bel. Da a_t nicht minimal in $A_{t-1} \cup A_t$ gibt's $a_{t-1} \in A_{t-1}$ mit $a_{t-1} \in A_{t-1}$.



Da $a_{t-1} \notin A_{t-2}$ gibt's $a_{t-2} \in A_{t-2}$ mit $a_{t-2} \in A_{t-2}$.

So fortfahrend erhält man Kette $a_1 < a_2 < \dots < a_t$ mit $a_i \in A_i$ für alle $i \in [t]$. Dies zeigt $w(P) \geq t$. $\square$

<u>Frage</u>: Sei $P = (X, \leq)$ eine unendliche partielle Ordnung, in der alle Ketten und Antiketten abzählbar sind. Muss X abzählbar sein?

Dies ist unentscheidbar in ZFC.

Satz 2.14. (Erdős, Szekeres) Es sei $n \in \mathbb{N}$. Jede Folge $(x_1, x_2, \ldots, x_{n^2+1})$ reeller Zahlen enthält monotone Teilfolge der Länge $n+1$.

Beweis. Definiere geordnete Menge $P = ([n^2+1], \leq^*)$ durch

$$i \leq^* j \iff (i \leq j \ \& \ x_i \leq x_j).$$

Nach Satz 2.13 gilt $\alpha(P)\,\omega(P) \geq n^2+1$

Also $\alpha(P) \geq n+1$ oder $\omega(P) \geq n+1$.

1. Fall $\omega(P) \geq n+1$.

Sei $i_1 \leq^* i_2 \leq^* \ldots \leq^* i_{n+1}$ Kette.

Nun $i_1 \leq i_2 \leq \ldots \leq i_{n+1}$ und $x_{i_1} \leq x_{i_2} \leq \ldots \leq x_{i_{n+1}}$

ist monoton wachsende Teilfolge.

2. Fall. $\alpha(P) \geq n+1$.

Sei $A \subseteq [n^2+1]$ Antikette mit $|A| = n+1$.

Schreibe $A = \{i_1, \ldots, i_{n+1}\}$, wobei $i_1 < \ldots < i_{n+1}$.

Nun $x_{i_1} > x_{i_2} > \ldots > x_{i_{n+1}}$, denn:

Sonst gäbe es j, k mit $1 \leq j < k \leq n+1$ und

$x_{i_j} \leq x_{i_k}$. Dann $i_j \leq^* i_k$, Wid. (zu A Antikette).

Daher gibt's sogar streng monoton fallende Teilfolge

der Länge $n+1$. $\square$