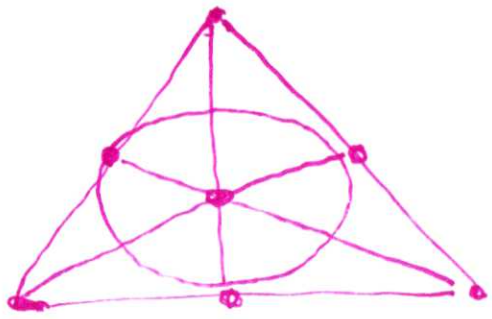
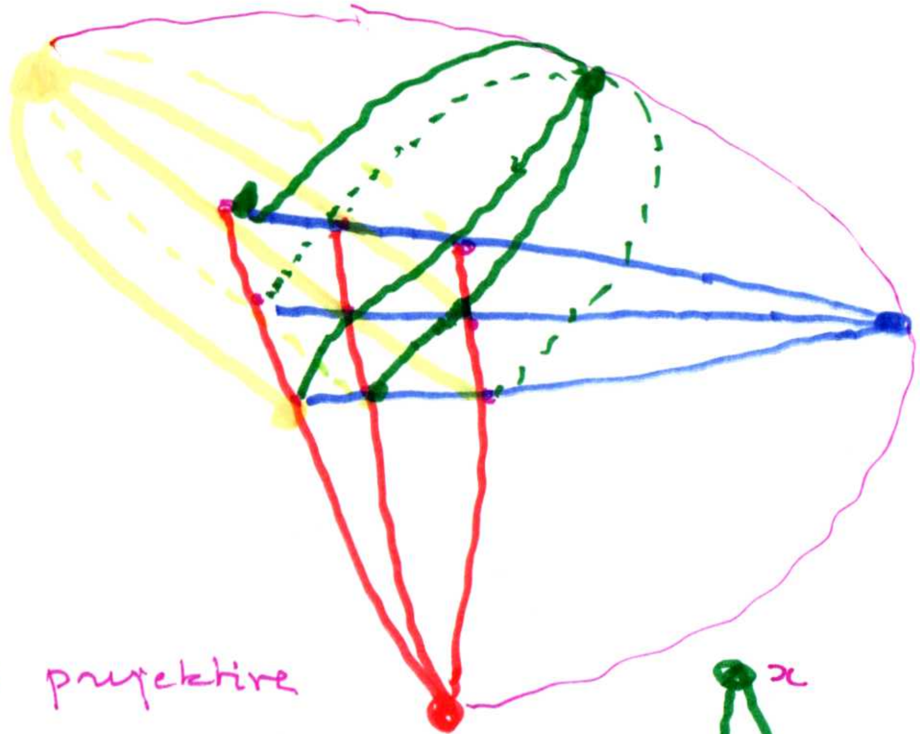
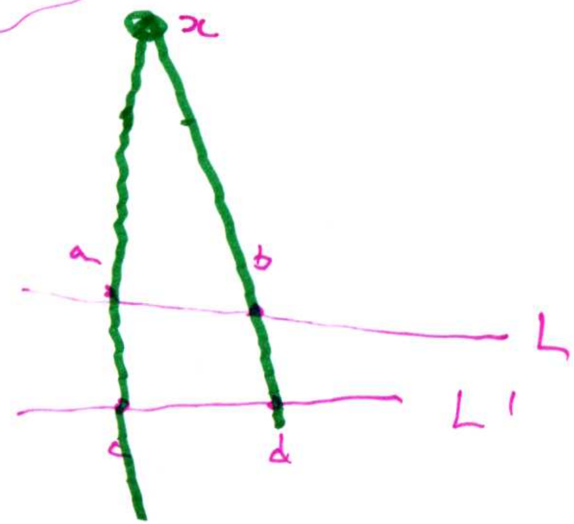


Fano-Ebene.



Lemma 9.2. Sei $(X, \mathcal{L})$ eine projektive Ebene. Für je zwei Geraden $L, L' \in \mathcal{L}$ gibt's einen Punkt $x \notin L \cup L'$.



Beweis. Angenommen $L \cup L' = X$.

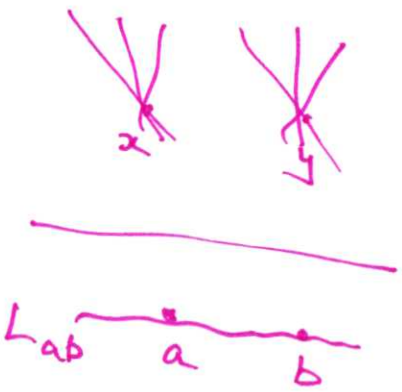
Sei $F = \{a, b, c, d\}$ wie in (P0)

Wegen $|F \cap L|, |F \cap L'| \leq 2$ ist sogar $|F \cap L| = 2$, $|F \cap L'| = 2$. OBdA $F \cap L = \{a, b\}$, $F \cap L' = \{c, d\}$. Seien $L_{ac}, L_{bd} \in \mathcal{L}$ die Geraden

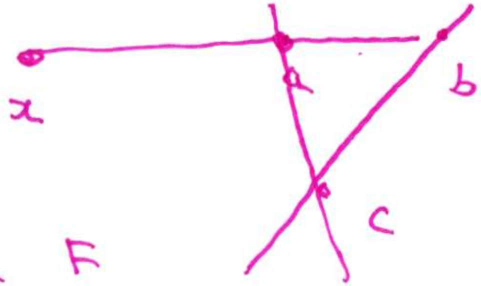
mit $a, c \in L_{ac}$, $b, d \in L_{bd}$. Es gilt $L_{ac} \neq L_{bd}$, denn sonst würden a, b, c, d auf einer Geraden liegen. Sei x der Punkt mit $L_{ac} \cap L_{bd} = \{x\}$. Nach Annahme ist $x \in L \cup L'$.
OBdA $x \in L$. Nun sind L, L_{ac} Geraden, auf denen a, x liegen. Somit $L = L_{ac}$. Auf diesen Geraden liegen a, b, c, Wid.

Lemma 9.3. Sei $(X, \mathcal{L})$ projektive Ebene. Für je zwei Punkte x, y gibt's eine Gerade L mit $x, y \notin L$.

Beweis. Sei F wie in (P0). Seien $a, b \in F \setminus \{x, y\}$ verschieden. Betrachte die Gerade L_{ab} mit $a, b \in L_{ab}$.
OBdA sei $x \in L_{ab}$ (wenn $x, y \notin L_{ab}$ sind wir fertig). Nun $x \notin F$, also $|F \setminus \{x, y\}| \geq 3$.



Sei $c \in F \setminus \{x, y\}$, $c \neq a, b$.

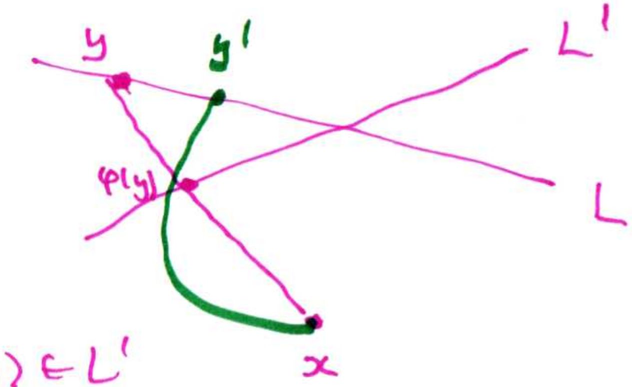


Jede der drei Geraden L_{ab}, L_{ac}, L_{bc} enthält einen der Punkte x, y.

OBdA $x \in L_{ab} \cap L_{ac}$. Nach Wahl von F sind L_{ab}, L_{ac} verschieden, also $L_{ab} \cap L_{ac} = \{a\}$.

Insgesamt $a = x$, Wid. □

Lemma 9.4. Sei $(X, \mathcal{L})$ projektive Ebene. Für alle $L, L' \in \mathcal{L}$ ist $|L| = |L'|$.

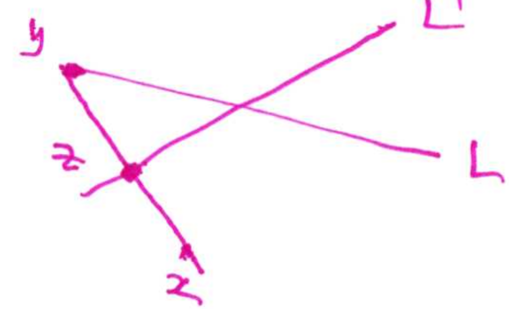


Beweis. Nach Lemma 9.2 gibt's $x \in X \setminus (L \cup L')$. Definiere $\varphi : L \to L'$ durch: Für $y \in L$ sei $\varphi(y) \in L'$ der Schnittpunkt von L_{xy} mit L'.

φ ist injektiv, denn: Seien $y, y' \in L$, $\varphi(y) = \varphi(y')$.

Die Gerade $L_{x\varphi(y)}$ schneidet L in y, y'. Somit $y = y'$.

φ surjektiv, denn: Sei $z \in L'$ bel. Sei



y der Schnittpunkt von L_{xz}, L.

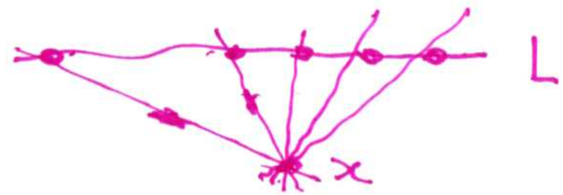
Dann $\varphi(y) = z$.

Insgesamt ist φ bijektiv und $|L| = |L'|$.

<u>Dfn 9.5.</u> Die <u>Ordnung</u> einer projektiven Ebene $(X, \mathcal{L})$ ist die Zahl $n \in \mathbb{N}_0$ mit $|L| = n+1$ für alle $L \in \mathcal{L}$.

<u>Lemma 9.6.</u> Sei $(X, \mathcal{L})$ projektive Ebene der Ordnung n. Durch jeden Punkt gehen $n+1$ Geraden und

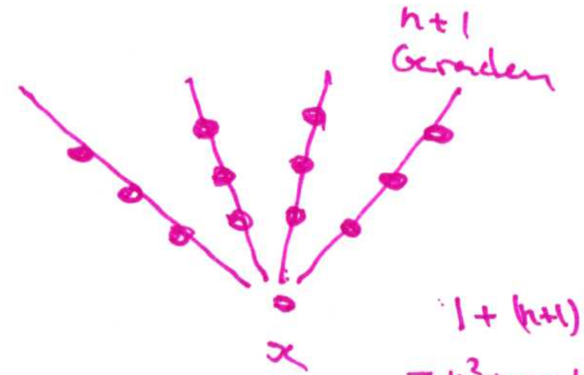
$$|X| = |\mathcal{L}| = n^2 + n + 1.$$



<u>Beweis.</u> Sei $x \in X$ beliebig. Sei $L \in \mathcal{L}$ eine Gerade mit $x \notin L$.

Nun ist $\{L_{xy} : y \in L\}$ die Menge der Geraden durch L,
denn: Sei L' eine Gerade mit $x \in L'$. Dann $L \neq L'$,
es gibt also y mit $L \cap L' = \{y\}$. Nun $L' = L_{xy}$.
Für $y, y' \in L$ mit $y \neq y'$ ist $L_{xy} \neq L_{xy'}$ denn sonst
gäbe es zwei y, y' enthaltende Geraden.
Dies zeigt, dass es $|L|$ Geraden durch x gibt.

Sei nun $x \in X$ bel. Es gibt $n+1$
Geraden durch x. Auf jeder liegen n
von x verschiedene Punkte, also



$1 + (n+1)n$
$= n^2+n+1$.

$$|X| = 1 + (n+1)n = n^2+n+1.$$

Betrachte $I = \{(x, L) \in X \times \mathcal{L} : x \in L\}$.

Da $|I| = (n+1)\,|\mathcal{L}|$ (auf jeder Geraden sind $n+1$ Punkte)

$= (n+1)\,|X|$ (durch jeden Punkt gehen $n+1$ Geraden)

ist $|X| = |\mathcal{L}|$. $\square$

Mögliche Ordnungen.

Nach (P0) hat jede proj Ebene mind. 4 Punkte.

Wg $|X| = n^2+n+1$ hat also jede proj Ebene mind. die Ordnung 2. Man kennt proj Ebenen der Ordnungen 2, 3, 4, 5, 7, 8, 9, 11, 13 und weiß dass es keine proj. Ebene der Ordnung 6, 10 gibt.

Vermutung Es gibt genau dann eine proj. Ebene der Ordnung n, wenn n Primzahlpotenz ist.

Satz 9.7. Sei F ein endlicher Körper. Es sei X die Menge der 1-dim UVR von F^3 und Y die Menge der 2-Dim UVR von F^3. Für $y \in Y$ setze $L(y) = \{x \in X : x \subseteq y\}$. Dann ist $(X, \mathcal{L})$ mit $\mathcal{L} = \{L(y) : y \in Y\}$ eine projektive Ebene der Ordnung $|F|$.

Beweis. (P0) Seien x_1, x_2, x_3, x_4 die von $(1,0,0), (0,1,0), (0,0,1), (1,1,1)$ erzeugten UVR von F^3. Da je drei dieser Vektoren lin. unabh. sind, liegen auf jeder Geraden höchstens 2 von ihnen.

(P1) Seien $L(y), L(y') \in \mathcal{L}$ verschieden. Dann $y \neq y'$. Also $\dim(y+y') = 3$ und $\dim(y \cap y') = 2+2-3 = 1$. Folglich $L(y) \cap L(y') = \{y \cap y'\}$.

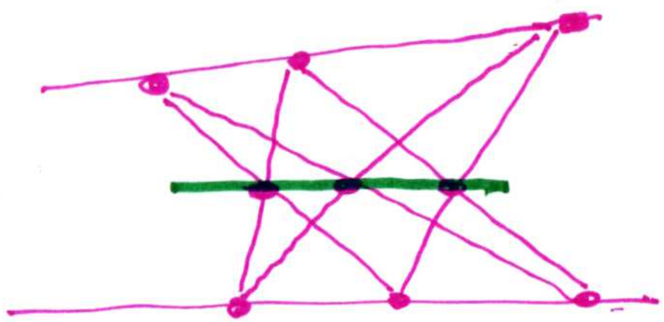
(P2) Seien $x, x' \in X$ verschieden. Dann ist $x + x' \in Y$ der einzige 2-Dim UVR von F^3 mit $x, x' \in L(x+x')$.

Jedes $x \in X$ enthält $(0,0,0)$ und $|F|-1$ weitere Punkte.

Also
$$\underbrace{|F|^3}_{\text{alle Vektoren in } F^3} = \underbrace{1}_{\text{Nullvektor}} + |X|(|F|-1),$$

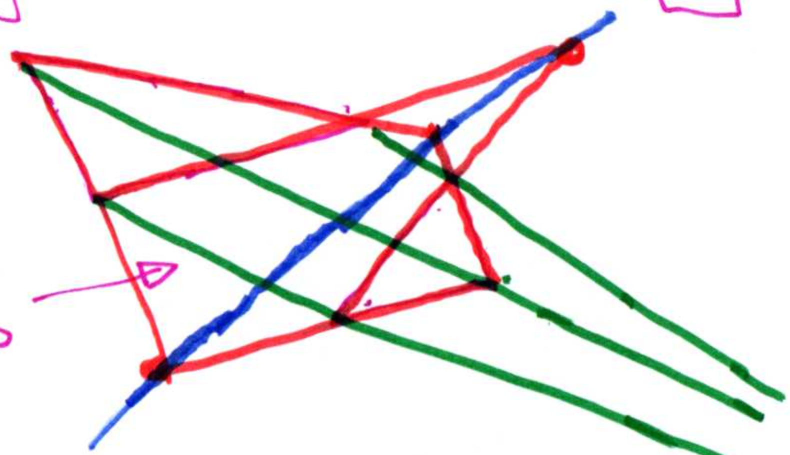
d.h.
$$|X| = \frac{|F|^3-1}{|F|-1} = |F|^2 + |F| + 1.$$

Folglich hat $(X, \mathcal{L})$ die Ordnung $|F|$. $\square$



Pappus

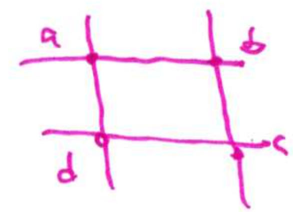
Desargues



Dualität

Lemma 9.8. Es sei $(X, \mathcal{L})$ eine projektive Ebene. Setze $B(x) = \{L \in \mathcal{L} : x \in L\}$ für alle $x \in X$ und $\mathcal{B} = \{B(x) : x \in X\}$. Dann ist $(\mathcal{L}, \mathcal{B})$ eine projektive Ebene.

Beweis. $\boxed{(P0)}$ Sei F wie in (P0) für $(X, \mathcal{L})$.



Schreibe $F = \{a, b, c, d\}$. Die Geraden $L_{ab}, L_{bc}, L_{cd}, L_{da}$ sind paarweise verschieden.

Angenommen es gäbe $x \in X$ derart, dass $B(x)$ drei der Geraden $L_{ab}, \dots, L_{da}$ enthält. Dann schneiden sich drei dieser Geraden in x. OBdA $x \in L_{ab} \cap L_{bc} \cap L_{cd}$. Da $b, x \in L_{ab} \cap L_{bc}$ ist $b = x$. Analog folgt $c = x$

aus $x \in L_{bc} \cap L_{cd}$. Insgesamt $b = c$, Wid.

(P1) Seien $B(x)$, $B(y) \in \mathcal{B}$ verschieden. Dann $x \neq y$.

Für $L \in \mathcal{L}$ ist

$$L \in B(x) \cap B(y) \iff x \in L \ \& \ y \in L$$
$$\iff L = L_{xy}.$$

Somit $B(x) \cap B(y) = \{L_{xy}\}$.

(P2) Seien $L, L' \in \mathcal{L}$ verschieden. Für $x \in X$ ist

$$L, L' \in B(x) \iff x \in L \cap L'$$

Folglich gibt's genau ein $B \in \mathcal{B}$ mit $L, L' \in B$. $\square$