Vorlesung 18. Wiederholung.

Satz 8.2. $T(K_n) = n^{n-2}$

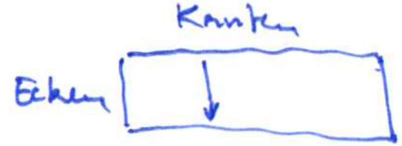
Satz 8.4. (Cauchy-Binet-Formel) Für jede $(m \times n)$-Matrix A und $(n \times m)$-Matrix B gilt

$$\det(AB) = \sum_{I \in [n]^{(m)}} \det(A_I)\det(B^I).$$

Folgerung 8.5.

$$\det(AA^T) = \sum_{I \in [n]^{(m)}} \det(A_I)^2.$$

G Graph, $V(G) = [n]$, $E(G) = \{e_1, \dots, e_m\}$.



Lemma 8.6. $D^G (D^G)^T = Q^G$

$Q^G = (q_{ij})_{ij \in [n]}$ Adjazenzmatrix

$q_{ii} = d(i)$, $q_{ij} = 0$ wenn $ij \notin E(G)$

$q_{ij} = -1$ wenn $ij \in E(G)$

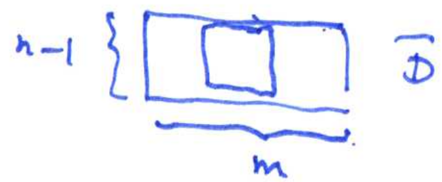
$D^G = (a_{ij})_{i \in [n],\, j \in [m]}$

$$a_{ij} = \begin{cases} 0 & \text{wenn } i \text{ nicht Endecke von } e_j \\ +1 & \text{wenn } e_j \text{ in } i \text{ beginnt} \\ -1 & \text{wenn } e_j \text{ in } i \text{ endet.} \end{cases}$$

Sei Q_{11} die $(n-1)\times(n-1)$-Matrix, die man aus Q durch Löschen der ersten Zeile und Spalte erhält.

Sei $\bar{D}$ die Matrix, die man aus D durch Löschen der ersten Zeile erhält. Lemma 8.6 impliziert

$$Q_{11} = \bar{D}\,(\bar{D})^T .$$



Aus der Cauchy-Binet-Formel folgt also

$$\det(Q_{11}) = \sum_{I\in[m]^{(n-1)}} \det(\bar{D}_I)^2 .$$

<u>Lemma 8.8.</u> Für $I\in[m]^{n-1}$ sei G_I der Graph mit

$$V(G_I)=[n], \quad E(G_I)=\{e_i : i\in I\}.$$

(a) Wenn G_I kein Baum ist, dann $\det(\bar{D}_I)=0$

(b) Wenn G_I ein Baum ist, dann $|\det(\bar{D}_I)|=1$

Folgerung 8.9. $\det(Q_{11}) = T(G)$

Beweis von Lemma 8.8. Induktion nach n.

$n=2$ | Hier ist $G_I \cong K_2$ ein Baum.

Außerdem $D_I = \begin{pmatrix} +1 \\ -1 \end{pmatrix}$ oder $D_I = \begin{pmatrix} -1 \\ +1 \end{pmatrix}$,

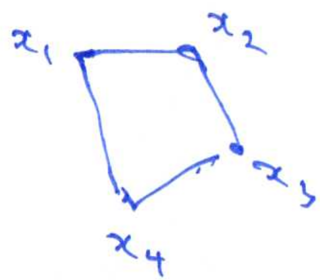
d.h. $\bar{D}_I = (-1)$ oder $D_I = (+1)$,

also $|\det(\bar{D}_I)| = 1$.

$n-1 \to n$ | Fall 1. Die Ecke 1 ist isoliert in G_I.

Dann enthält $G_I - 1$ einen Kreis $x_1, \dots, x_k$.

Die Matrix $\bar{D}_I$ enthält die Spalten



	(x_1x_2)	(x_2x_3)	(x_3x_4)	(x_4x_1)
x_1	$+1$	0	0	-1
x_2	-1	$+1$	0	0
x_3	0	-1	$+1$	0
x_4	0	0	-1	$+1$

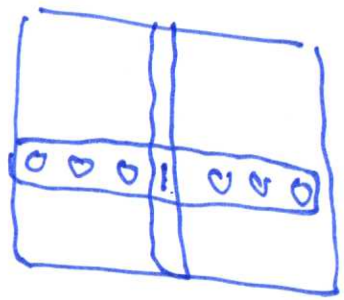
Es gibt eine Linearkomb. mit Koeff. ± 1 dieser Spalten, die den Nullvektor ergibt. Somit sind die Spalten von $\bar{D}_I$ lin. abh. Somit $\det(\bar{D}_I) = 0$.

<u>Fall 2.</u> Es gibt eine isolierte Ecke $x \in [2,n]$.

Die zu x gehörige Zeile ist der Nullvektor.

Somit $\det(G_I) = 0$.

<u>Fall 3.</u> G_I hat keine isolierte Ecke.



G_I hat 2 Blätter, denn

$$2(n-1) = 2|E(G_I)| = \sum_{x \in [n]} d(x).$$

Sei $x \in [2,n]$ ein Blatt. In der Zeile ~~der~~ Ecke x ist ein Eintrag ± 1, die anderen Einträge sind 0.

Somit $\det(\bar{D}_I) = \pm \det(\bar{D}'_{I'})$,

wobei $\det(\bar{D}'_{I'})$ nach Ind. Ann. ± 1 ist, wenn $G_I - x$ ein Baum ist und 0 sonst.

Da $G_I - x$ genau dann ein Baum ist, wenn G_I ein Baum ist, sind wir fertig. $\square$

<u>Beispiel</u> Für $G = K_n$ ist

$$Q^G = \left.\underbrace{\begin{pmatrix} n-1 & -1 & -1 & \cdots & -1 \\ -1 & n-1 & & & \vdots \\ -1 & -1 & \ddots & & \vdots \\ -1 & \cdots & \cdots & & n-1 \end{pmatrix}}_{n}\right\} n ,$$

also

$$Q_{11} = \left.\underbrace{\begin{pmatrix} n-1 & \cdots & -1 \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ -1 & \cdots & n-1 \end{pmatrix}}_{n-1}\right\} n-1$$

Subtrahiere von allen Zeilen außer der ersten die erste Zeile.

$$\det(Q_{11}) = \begin{pmatrix} n-1 & -1 & -1 & \cdots & -1 \\ -n & n & 0 & \cdots & 0 \\ -n & 0 & n & \cdots & 0 \\ \vdots & & & & \\ -n & 0 & 0 & \cdots & n \end{pmatrix}$$

Addiere nun alle Spalten zur ersten.

$$\det(Q_{11}) = \left.\begin{pmatrix} 1 & -1 & -1 & \cdots & -1 \\ 0 & n & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 0 & n & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & n \end{pmatrix}\right\} n-1$$

$$= 1 \cdot n \cdot n \cdot \ldots \cdot n$$

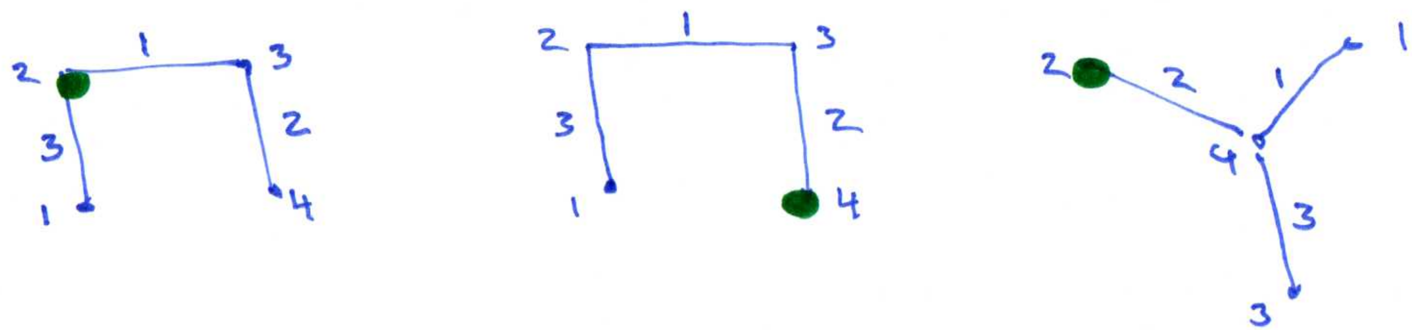
$$= \underline{n^{n-2}}$$

Einfachster Beweis.

Sei $n \geq 2$ fest. Ein SUKOWUB (sukzessive konstruierter Wurzelbaum) ist ein Baum mit Eckenmenge $[n]$

- mit einer Ecke, die als Wurzel ausgezeichnet ist
- deren Kanten mit den Zahlen $1, \ldots, n-1$ durchnummeriert sind.

Beispiele. Für $n = 4$ sind

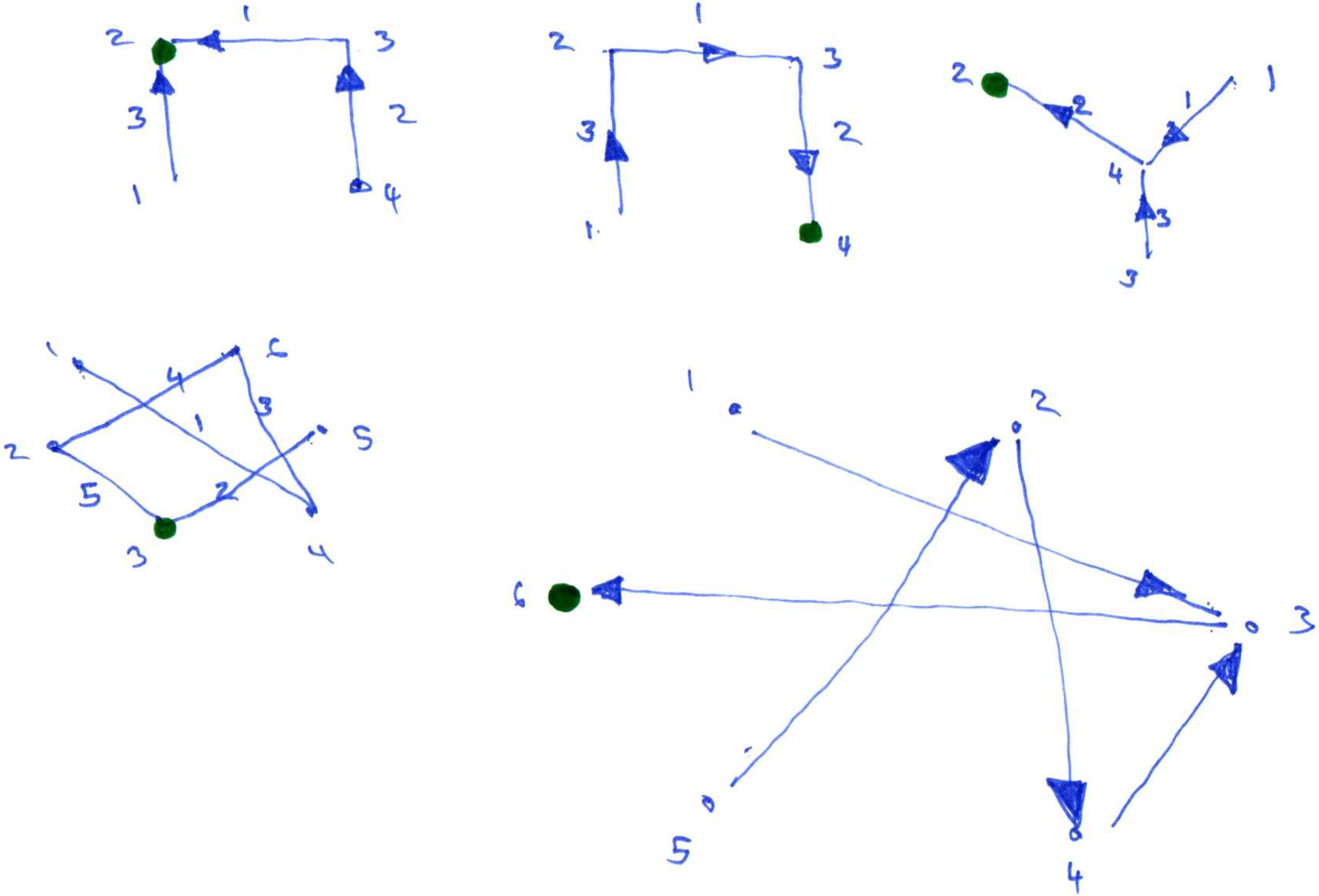


Die Anzahl der SUKOWUBs ist $T(K_n) \cdot n \cdot (n-1)!$

$\uparrow$ Bäume $\quad \uparrow$ Wurzel $\quad \uparrow$ Nummerierung Kanten

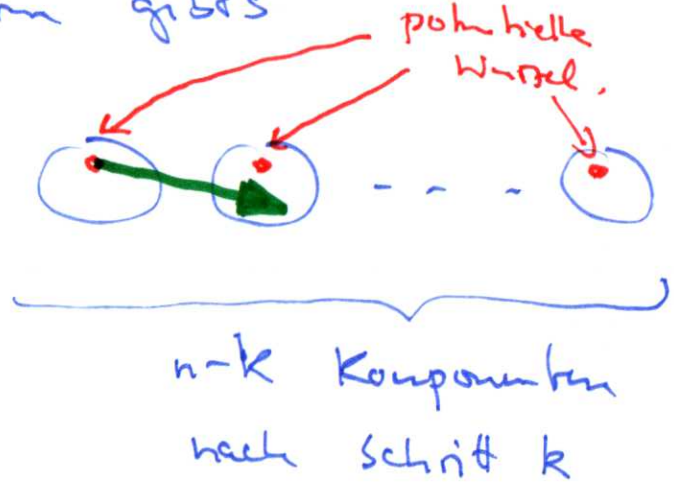
In einem SUKOWUB kann man die Kanten zur Wurzel hin orientieren.

Beispiel.



Konstruiere einen SUKOWUB rekursiv in $n-1$ Schritten. Im Schritt k fügen wir die orientierte Kante mit Nummer k hinzu. Nach Schritt k hat man einen Wald mit k Kanten und $n-k$ Komponenten. Außerdem gibt's in jeder Komponente genau eine Ecke mit ausgehendem Grad 0 (die noch die Wurzel werden könnten).

- Es gibt $n(n-1)$ Möglichkeiten für Schritt 1.
- Sei $1 \leq k \leq n-2$. Wieviele Möglichkeiten gibt's im Schritt $k+1$? Seien $a_1, \ldots, a_{n-k}$ die Eckenanzahlen der $n-k$ Komponenten. Die gesuchte Anzahl



ist $(n-a_1)+(n-a_2)+\ldots+(n-a_{n-k})$

$= n\cdot(n-k)-(a_1+\ldots+a_{n-k})$

$= n\cdot(n-k)-n$

$= n(n-k-1)$

Somit ist die Anzahl der SUKOWUBs

$n(n-1)\cdot n(n-2)\cdot n(n-3)\cdot\ldots\cdot n\cdot 1$

$= n^{n-1}(n-1)!$

Insgesamt $T(K_n)\cdot n\cdot(n-1)! = n^{n-1}\cdot(n-1)!$

d.h. $T(K_n) = n^{n-2}$.

§9. Projektive Ebenen.

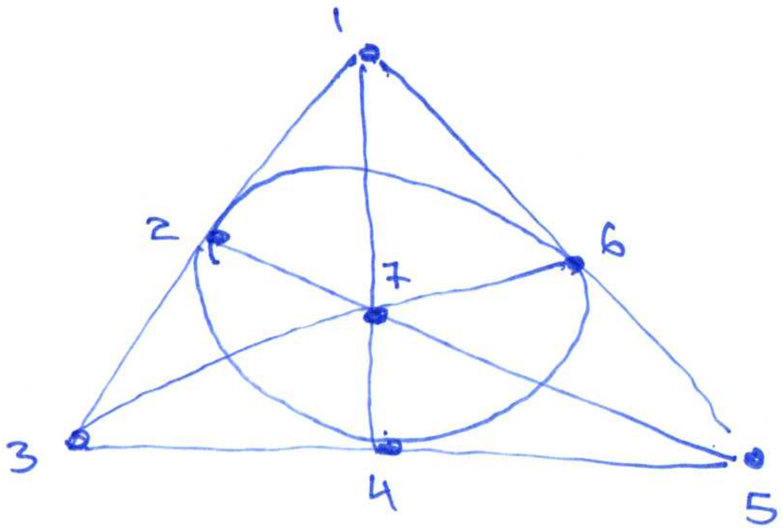
Dfn 9.1. Eine *projektive* Ebene ist ein Paar $(X, \mathcal{L})$, das aus einer endlichen Menge X von *Punkten* und einer Menge $\mathcal{L} \subseteq \mathcal{P}(X)$ von Geraden besteht, wobei

(P0) Es gibt $F \subseteq X^{(4)}$ mit $|F \cap L| \leq 2$ für alle $L \in \mathcal{L}$

(P1) Für alle verschiedenen $L_1, L_2 \in \mathcal{L}$ ist $|L_1 \cap L_2| = 1$

(P2) Für alle verschiedenen $x, y \in X$ gibt's genau ein $L \in \mathcal{L}$ mit $x, y \in L$.

Beispiel.



Fano - Ebene.

$X = \{1, 2, 3, 4, 5, 6, 7\}$

$\mathcal{L} = \{ \{1,2,3\}, \{3,4,5\}, \{5,6,1\}, \{1,4,7\}, \{2,5,7\}, \{3,6,7\}, \{2,4,6\} \}$