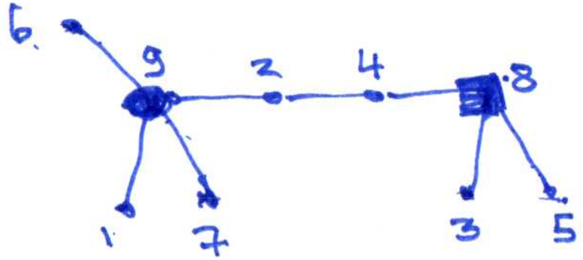
Zweiter Beweis von Satz 8.2.

Vorlesung 17

Sei V eine Menge mit $|V| = n$.

Ein <u>Wirbeltier</u> ist ein Baum W mit $V(W) = V$, bei dem eine Ecke mit einem Kreis ● markiert ist und eine Ecke mit einem Quadrat ■ markiert ist. Es sei $\mathcal{W}$ die Menge der Wirbeltiere.



Da $|\mathcal{W}| = |T(K_n)|\, n^2$, genügt es,

$|\mathcal{W}| = n^n = \{f : f \text{ ist Funktion von } V \text{ nach } V\}$

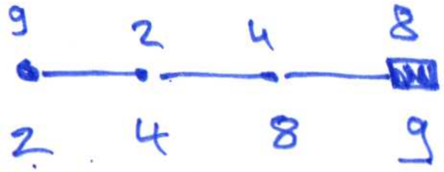
zu beweisen.

Dann ordnen wir jedem Wirbeltier eine Funktion $f: V \to V$ zu.

Die <u>Wirbelsäule</u> ist der Weg von ● zu ■, im Beispiel

. Für eine Ecke x, die nicht auf der Wirbelsäule liegt, ist $f(x)$ die ~~Ecke~~ auf x folgende Ecke auf dem Weg von x zur Wirbelsäule. Im Beispiel $f(1) = f(7) = 9$, $f(6) = 9$, $f(3) = f(5) = 8$.

Ordne die Ecken auf der Wirbelsäule der größe nach



Sehe im Beispiel dann $f(2) = 9$, $f(4) = 2$, $f(8) = 4$, $f(9) = 8$, allg.

f(kleinste Ecke der Wirbelsäule) = Ecke mit ●,

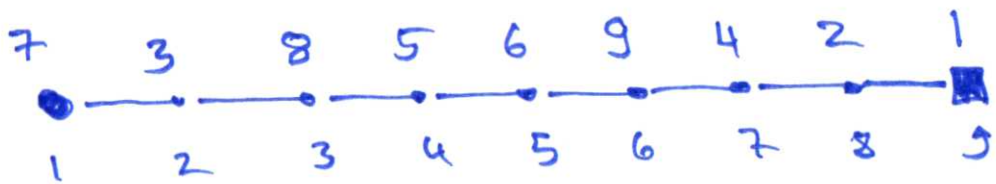
⋮

f(größte Ecke der Wirbelsäule) = Ecke mit ■.

Es bleibt zu beweisen, dass es für jede Funktion genau ein Wirbeltier gibt.

Beispiel.

$f(1) = 7$	$f(4) = 5$	$f(7) = 4$
$f(2) = 3$	$f(5) = 6$	$f(8) = 2$
$f(3) = 8$	$f(6) = 9$	$f(9) = 1$



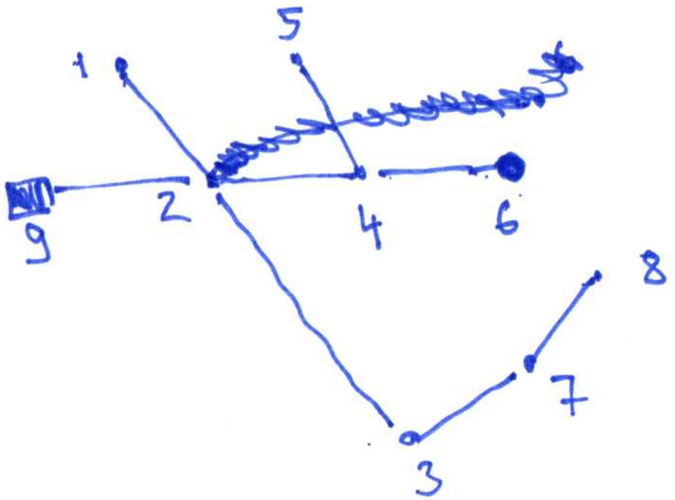
Zweites Beispiel.

$\boxed{f(1) = 2}$ $\quad f(4) = 4 \quad$ $\boxed{f(7) = 3}$

$f(2) = 6 \quad$ $\boxed{f(5) = 4}$ $\quad$ $\boxed{f(8) = 7}$

$\boxed{f(3) = 2}$ $\quad$ $\boxed{f(6) = 2}$ $\quad f(9) = 9$

f nimmt die Werte 1, 5, ~~6~~, 8 nicht an.

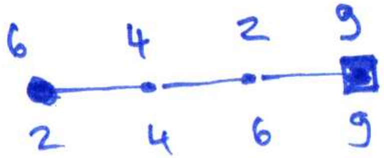


Die Einschränkung von f auf $\{2, 3, 4, 6, 7, 9\}$ nimmt den Wert 7 nicht an

Die Einschränkung von f auf $\{2, 3, 4, 6, 9\}$ nimmt den Wert 3 nicht an

Die Einschränkung von f auf $\{2, 4, 6, 9\}$ ist surjektiv.

Die Wirbelsaule ist 2469.



Satz 8.4. (Cauchy-Binet Formel) Es seien $m, n \in \mathbb{N}$, A eine $m \times n$-Matrix und B eine $n \times m$-Matrix. Für $I \in [n]^{(m)}$ sei A_I die $m \times m$-Teilmatrix von A, die nur aus den Spalten besteht, deren Index in I ist. Analog sei B^I die $m \times m$-Teilmatrix von B, die nur aus den Zeilen von B, deren Index in I ist, besteht. Dann

$$\det(AB) = \sum_{I \in [n]^{(m)}} \det(A_I) \det(B^I).$$

<u>Beispiel.</u> Sei $m = 2$,

$$A = \begin{pmatrix} a_1, \dots, a_n \\ b_1, \dots, b_n \end{pmatrix}, \quad B = A^T = \begin{pmatrix} a_1 & b_1 \\ \vdots & \vdots \\ a_n & b_n \end{pmatrix}.$$

Dann ist

$$AB = \begin{pmatrix} \Sigma a_i^2 & \Sigma a_i b_i \\ \Sigma a_i b_i & \Sigma b_i^2 \end{pmatrix},$$

also $\quad \det(AB) = \sum_i a_i^2 \cdot \sum_i b_i^2 - (\sum_i a_i b_i)^2$

Betrachte $\quad I = \{i, j\}$ ~~mit~~ $\in [n]^{(2)}$. Dann

$$A_I = \begin{pmatrix} a_i & a_j \\ b_i & b_j \end{pmatrix} \quad \text{und} \quad B^I = \begin{pmatrix} a_i & b_i \\ a_j & b_j \end{pmatrix}$$

Nach Cauchy-Binet-Formel ist also

$$\sum_i a_i^2 \cdot \Sigma b_i^2 - (\sum_i a_i b_i)^2$$

$$= \sum_{1 \le i < j \le n} (a_i b_j - b_i a_j)^2$$

Hieraus folgt $\quad (\Sigma a_i b_i)^2 \le \sum_i a_i^2 \cdot \Sigma b_i^2 \quad$ (CSU).

Beweis von Satz 8.4.

Schreibe $A = \begin{pmatrix} a_{11} & \cdots & a_{1n} \\ \vdots & & \\ a_{m1} & \cdots & a_{mn} \end{pmatrix}$, $B = \begin{pmatrix} b_{11} & \cdots & b_{1m} \\ \vdots & & \vdots \\ b_{n1} & & b_{nm} \end{pmatrix}$,

$$AB = \begin{pmatrix} c_{11} & \cdots & c_{1m} \\ \vdots & & \\ c_{m1} & \cdots & c_{mm} \end{pmatrix}.$$

Dann $c_{ij} = \sum_{r=1}^{n} a_{ir} b_{rj}$ für alle $i, j \in [m]$, also

$$\det(AB) = \sum_{\pi \in S_m} \operatorname{sgn}(\pi)\, c_{1\pi(1)} \cdot \ldots \cdot c_{m\pi(m)} \qquad \text{(Leibniz-Formel)}$$

$$= \sum_{\pi \in S_m} \operatorname{sgn}(\pi) \sum_{r_1=1}^{n} a_{1r_1} b_{r_1\pi(1)} \cdot \ldots \cdot \sum_{r_m=1}^{n} a_{mr_m} b_{r_m\pi(m)}$$

$$= \sum_{r_1=1}^{n} \cdots \sum_{r_m=1}^{n} a_{1r_1} \cdot \ldots \cdot a_{mr_m} \sum_{\pi \in S_m} \operatorname{sgn}(\pi)\, b_{r_1\pi(1)} \cdots b_{r_m\pi(m)}$$

Für $r_1, \dots, r_m \in [n]$ setze

$$D(r_1, \dots, r_m) = \sum_{\pi \in S_m} \operatorname{sgn}(\pi)\, b_{r_1 \pi(1)} \cdots b_{r_m \pi(m)}.$$

Nach Leibniz-Formel ist

$$D(r_1, \dots, r_m) = \det \begin{pmatrix} b_{r_1 1} & \cdots & b_{r_1 m} \\ \vdots & & \vdots \\ b_{r_m 1} & \cdots & b_{r_m m} \end{pmatrix},$$

wobei die Matrix aus den Zeilen von B mit Indizes $r_1, \dots, r_m$ besteht. Also ist

$D(r_1, \dots, r_m) = 0$ wenn $r_i = r_j$ für zwei Indizes $i, j \in [m]$ gilt.

Also

$$\det(AB) = \sum_{|\{r_1, \dots, r_m\}| = m} \cdots \sum a_{1 r_1} \cdots a_{m r_m} D(r_1, \dots, r_m).$$

Betrachte eine Menge $I = [n]^{(m)}$ und schreibe

$I = \{i_1, \ldots, i_m\}$ mit $i_1 < \ldots < i_m$.

Zu I gehören $m!$ Summanden in obigen Formel für $\det(AB)$.
Die Summe dieser $m!$ Summanden ist

$$\sum_{\pi \in S_m} a_{1 i_{\pi(1)}} \cdots a_{m i_{\pi(m)}} D(i_{\pi(1)}, \ldots, i_{\pi(m)})$$

$$= \sum_{\pi \in S_m} \operatorname{sgn}(\pi)\, a_{1 i_{\pi(1)}} \cdots a_{m i_{\pi(m)}} D(i_1, \ldots, i_m)$$

$$= D(i_1, \ldots, i_m) \cdot \det \begin{pmatrix} a_{1 i_1} & \cdots & a_{1 i_m} \\ \vdots & & \\ a_{m i_1} & \cdots & a_{m i_m} \end{pmatrix}$$

$$= \det(A_I) \cdot \det(B^I).$$

Insgesamt $\det(AB) = \sum_{I \in [n]^{(m)}} \det(A_I) \det(B^I)$. $\square$

<u>Folgerung 8.5.</u> Für jede $m \times n$ - Matrix A ist

$$\det(A A^T) = \sum_{I \in [n]^{(m)}}' \det(A_I)^2 .$$

<u>Beweis.</u> Wende Satz 8.4 mit $B = A^T$ an. Dann

$$B^I = (A_I)^T . \qquad \square$$

. . . . .

Sei G ein Graph mit Eckenmenge $[n]$.

Die <u>Adjazenzmatrix von G</u> ist die $n \times n$ - Matrix

$Q^G = (q_{ij})_{1 \le i,j \le n}$ ist definiert durch

- $q_{ii} = d(i)$ für alle $i \in [n]$
- $q_{ij} = -1$ wenn $i \neq j$ und $\{i,j\} \in E(G)$
- $q_{ij} = 0$ wenn $i \neq j$ und $\{i,j\} \notin E(G)$.

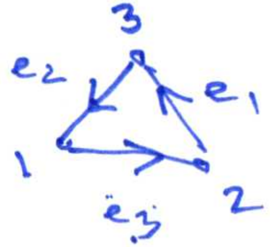
Sei $E(G) = \{e_1, \dots, e_m\}$ eine Aufzählung von $E(G)$.

Wähle für jede Kante e_j eine Orientierung $\vec{e_j} = (x_j, y_j)$

Die <u>Inzidenzmatrix</u> von G ist die $n \times m$-Matrix

$$D^G = (a_{ij})_{1 \le i \le n,\ 1 \le j \le m} \quad \text{mit}$$

$$a_{ij} = \begin{cases} 0 & \text{wenn } i \text{ nicht Endecke von } e_j \text{ ist} \\ +1 & \text{wenn } e_j \text{ in } i \text{ beginnt} \\ -1 & \text{wenn } e_j \text{ in } i \text{ endet.} \end{cases}$$



$$D^G = \begin{pmatrix} 0 & -1 & +1 \\ +1 & 0 & -1 \\ -1 & +1 & 0 \end{pmatrix}$$

<u>Lemma 8.6.</u> Für jeden Graphen G gilt $D^G \cdot (D^G)^T = Q^G$.

<u>Beweis.</u> Seien $i, j \in [n]$ beliebig. Der (i,j)-Eintrag von $D^G \cdot (D^G)^T$ ist das Skalarprodukt der i-ten und j-ten Zeile von D^G.

Für $i = j$ ist $d_{ii} = d(i) = q_{ii}$. Wenn $i \neq j$ und $\{i,j\} \notin E(G)$ ist d_{ij} 0. Wenn $i \neq j$ und $\{i,j\} \in E(G)$ ist d_{ij} -1. $\square$