16. Vorlesung

Zweiter Beweis des Satzes von Sperner.

Sei $\mathcal{P}(X) = \bigcup_{k\in[m]} \mathcal{C}_k$ eine Partition von $\mathcal{P}(X)$ in (nicht leere) symmetrische Ketten, wobei $|X| = n$.

Für jede Menge $A \in X^{(\lfloor n/2 \rfloor)}$ gibt's genau Kette $\mathcal{C}_i$, die A enthält. Umgekehrt enthält jede Kette $\mathcal{C}_i$ genau eine Menge aus $X^{(\lfloor n/2 \rfloor)}$. Dies zeigt $m = |X^{(\lfloor n/2 \rfloor)}| = \binom{n}{\lfloor n/2 \rfloor}$.

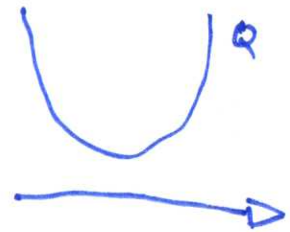
Da jede Kette $\mathcal{C}_i$ höchstens eine Menge aus einer Antikette $\mathcal{A}$ enthalten kann, folgt $|\mathcal{A}| \leq m = \binom{n}{\lfloor n/2 \rfloor}$. $\square$

– Extremale Graphentheorie –

Lemma 7.8 (Cauchy-Schwarz) Für alle reellen Zahlen $a_1, \dots, a_n$, $b_1, \dots, b_n$ gilt

$$\left(\sum_{i=1}^{n} a_i b_i\right)^2 \le \sum_{i=1}^{n} a_i^2 \cdot \sum_{i=1}^{n} b_i^2 .$$

Beweis. Betrachte das quadratische Polynom



$$Q(x) = \sum_{i=1}^{n} (a_i x + b_i)^2 = K x^2 + 2L x + M,$$

wobei $K = \sum_{i=1}^{n} a_i^2$, $L = \sum_{i=1}^{n} a_i b_i$, $M = \sum_{i=1}^{n} b_i^2$.

Wenn $K = 0$ ist $a_1 = \dots = a_n = 0$ und die Beh. ist klar.

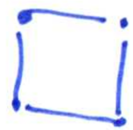
Sei nun $K > 0$. Da $(a_i x + b_i)^2 \ge 0$ für alle $i \in [n]$, $x \in \mathbb{R}$ ist $Q(x) \ge 0$ für alle $x \in \mathbb{R}$. Also ist es nicht so, dass Q zwei verschiedene reelle Nullstellen hat.

Die Lösungsformel

$$x_{1/2} = \frac{-2L \pm \sqrt{(2L)^2 - 4KM}}{2K} = -\frac{L}{K} \pm \frac{\sqrt{L^2 - KM}}{K}.$$

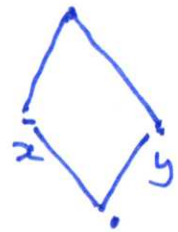
zeigt nun $L^2 - KM \leq 0$. $\square$

Satz 79. Jeder C_4-freie Graph mit n Ecken hat höchstens $\frac{1}{2}(n^{3/2} + n)$ Kanten.



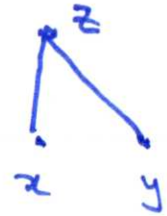
Beweis. Es sei $G = (V, E)$ C_4-frei mit $|V| = n$ und Gradfolge $(d_1, \dots, d_n)$.

Nun ist $\boxed{\sum_{i=1}^{n} \binom{d_i}{2} \leq \binom{n}{2}}$ $(*)$



Warum? Für jedes Paar $\{x, y\} \in V^{(2)}$ ist

$|N(x) \cap N(y)| \leq 1$ (sonst enthielte G einen C_4).



Somit $\sum_{\{x,y\} \in V^{(2)}} |N(x) \cap N(y)| \leq |V^{(2)}| = \binom{n}{2}$.

Jede Ecke z trägt $\binom{d(z)}{2}$ zur linken Seite bei.

Somit $\sum_{i=1}^{n} \binom{d_i}{2} = \sum_{z \in V} \binom{d(z)}{2} = \sum_{\{x,y\} \in V^{(2)}} |N(x) \cap N(y)| \leq \binom{n}{2}$.

Aus (*) folgt

$$\sum_{i=1}^{n} (d_i^2 - d_i) \leq n^2 - n$$

$\boxed{\binom{m}{2} = \frac{m(m-1)}{2} = \frac{m^2-m}{2} \text{ für alle } m}$

Nach CSU ist

$$\left(\sum_{i=1}^{n} d_i \cdot 1 \right)^2 \leq \sum_{i=1}^{n} d_i^2 \cdot \sum_{i=1}^{n} 1^2 ,$$

also $$\frac{(2|E|)^2}{n} \leq \sum_{i=1}^{n} d_i^2$$

Also $$\frac{(2|E|)^2}{n} - 2|E| \leq n^2 - n .$$

Folglich $$\left(2|E| - \frac{n}{2}\right)^2 = \underline{(2|E|)^2 - 2|E|n} + \frac{n^2}{4}$$

$$\leq n(n^2 - n) + \frac{n^2}{4} < n^3 ,$$

d.h. $2|E| - \frac{n}{2} < n^{3/2}$,

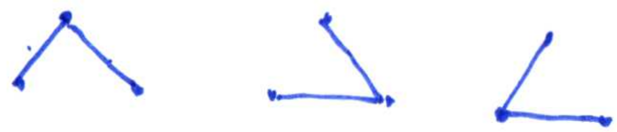
d.h. $|E| < \frac{1}{2}\left(n^{3/2} + \frac{n}{2}\right)$. $\square$

§8. Die Anzahl aufspannender Bäume.

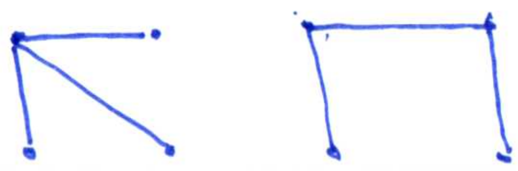
Dfn 8.1. Für einen Graphen G bezeichnet $T(G)$ die Anzahl der aufspannenden Bäume von G.

$\boxed{T(K_1) = 1 = 1^{-1}}$

$\boxed{T(K_2) = 1 = 2^0}$

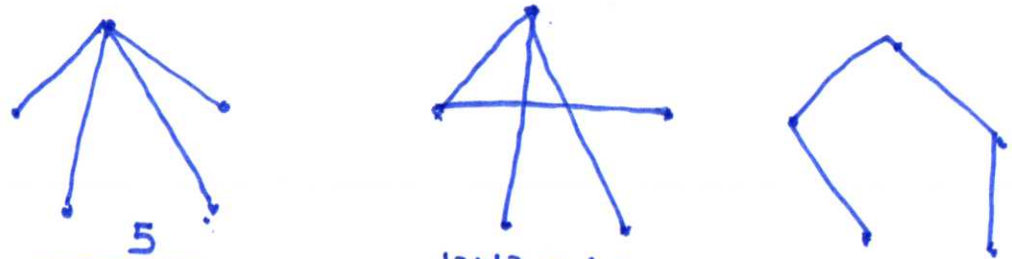


$\boxed{T(K_3) = 3 = 3^1}$



4 12

$\boxed{T(K_4) = 16 = 4^2}$



5 120/2 = 60 120/2 = 60

$\boxed{T(K_5) = 125 = 5^3}$

Satz 8.2 (Cayley) Für alle $n \in \mathbb{N}$ ist $T(K_n) = n^{n-2}$.

Lemma 8.3. Es seien n und $d_1, \ldots, d_n$ positive ganze Zahlen mit $d_1 + \ldots + d_n = 2n-2$. Die Anzahl der Bäume T mit $V(T) = [n]$ und $d_T(i) = d_i$ für alle $i \in [n]$ ist

$$\frac{(n-2)!}{(d_1-1)! \cdot \ldots \cdot (d_n-1)!}.$$

Beweis. Induktion nach n.

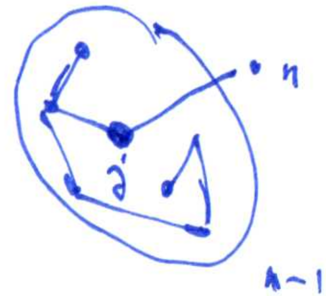
$n=1$| klar (da die Voraussetzung nie gilt)

$n=2$| Nun ist $d_1 = d_2 = 1$ und es gibt

genau einen solchen Baum. Da $\frac{(2-2)!}{(1-1)!(1-1)!} = \frac{0!}{0!0!} = \frac{1}{1 \cdot 1} = 1$ stimmt die Formel.

$\underline{n-1 \to n}$ Da $d_1 + \ldots + d_n < 2n$ gibt's $i \in [n]$ mit $d_i < 2$.

OBdA sei $d_n = 1$. Für $j \in [n-1]$ sei J_j die Anzahl der gesuchten Bäume, ~~mit~~ die $\{j, n\}$ als Kante haben. Wegen der Ind. Ann. ist



$$J_j = \frac{(n-3)!}{(d_1-1)! \cdot \ldots \cdot (d_{j-1}-1)!\,(d_j-2)! \cdot (d_{j+1}-1)! \cdot \ldots \cdot (d_{n-1}-1)!}$$

$$= \frac{(n-3)!\,(d_j-1)}{(d_1-1)! \cdot \ldots \cdot (d_{n-1}-1)!}$$

für alle $j \in [n-1]$ mit $d_j > 1$. Wenn $d_j = 1$ ist $J_j = 0$, d.h. obige Formel gilt immer.

Die gesuchte Anzahl der Bäume ist nun

$$\sum_{j=1}^{n-1} J_j = \frac{(n-3)!}{(d_1-1)! \cdot \ldots \cdot (d_{n-1}-1)!} \cdot \sum_{j=1}^{n-1} (d_j - 1).$$

Da $\sum_{j=1}^{n-1} (d_j - 1) = \sum_{j=1}^{n} (d_j - 1)$ (denn $d_n = 1$)

$$= (2n-2) - n = n-2$$

ist die gesuchte Anzahl also

$$\frac{(n-2)!}{(d_1-1)! \cdot \ldots \cdot (d_n-1)!} .$$

$\square$

<u>Erster Beweis von Satz 8.2.</u> Für alle $x_1, \ldots, x_n \in \mathbb{R}$ ist

$$(x_1 + \ldots + x_n)^{n-2} = \sum_{e_1+\ldots+e_n = n-2} \binom{n-2}{e_1, \ldots, e_n} x_1^{e_1} \cdot \ldots \cdot x_n^{e_n} .$$

Speziell für $x_1 = \ldots = x_n = 1$ erhalten wir

$$n^{n-2} = \sum_{e_1+\ldots+e_n = n-2} \frac{(n-2)!}{e_1! \cdot \ldots \cdot e_n!}$$

Schreibe $e_i = d_i - 1$ mit natürlichen Zahlen $d_1, \ldots, d_n$.

Dann

$$n^{n-2} = \sum_{\substack{d_1 + \ldots + d_n = 2n-2 \\ d_1, \ldots, d_n \geq 1}} \frac{(n-2)!}{(d_1 - 1)! \cdot \ldots \cdot (d_n - 1)!}$$

Nach Lemma 8.3 ist die rechte Seite die Anzahl der Bäume mit Eckenmenge $[n]$. $\square$