15. Vorlesung

Lemma 7.4. Jede stetige Funktion $f : [0,1] \to [0,1]$ hat einen Fixpunkt, d.h. es gibt $\xi \in [0,1]$ mit $f(\xi) = \xi$.

Erster Beweis. Definiere $g : [0,1] \to \mathbb{R}$ durch $g(x) = f(x) - x$.

Da $g(0) = f(0) - 0 \geq 0$ und $g(1) = f(1) - 1 \leq 1 - 1 = 0$

gibt's nach Zwischenwertsatz ein $\xi \in [0,1]$ mit $g(\xi) = 0$.

Dies tut's.

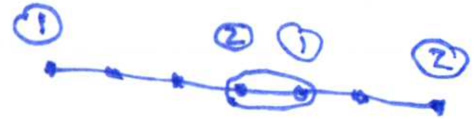
$\square$

Zweiter Beweis. Betrachte $h : [0,1] \to \{1,2\}$ mit

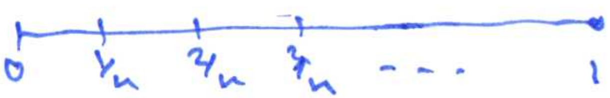
$$h(x) = 1 \Rightarrow x \leq f(x)$$

$$h(x) = 2 \Rightarrow x \geq f(x)$$

und $h(0) = 1$, $h(1) = 2$.



Für $n \in \mathbb{N}$
Wende Satz 7.2 auf die Unterteilung



an. Dies liefert $z_n, z_n' \in [0,1]$ mit $|z_n - z_n'| = \frac{1}{n}$,
$h(z_n) = 1$, $h(z_n) = 2$.

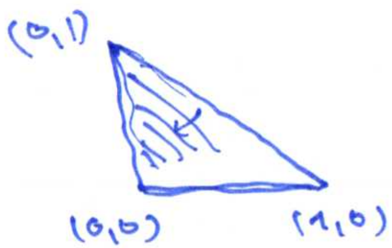
Nach Satz von Bolzano & Weierstraß hat $(z_n)_{n \in \mathbb{N}}$ eine konvergente Teilfolge $(z_{n(k)})_{k \in \mathbb{N}}$. Setze $\xi = \lim_{k \to \infty} z_{n(k)}$.

Für alle $k \in \mathbb{N}$ ist $h(z_{k(n)}) = 1$, also $z_{k(n)} \leq f(z_{k(n)})$.

Im Limes $n \to \infty$ erhalten wir $\xi \leq f(\xi)$.

Da auch $\xi = \lim_{k \to \infty} z'_{n(k)}$ ist analog auch $\xi \geq f(\xi)$.

Also ist ξ ein Fixpunkt von f. $\square$

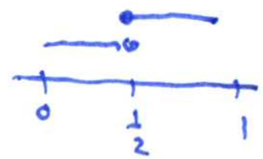


Setze $\Delta = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : x \geq 0, \ y \geq 0, \ x + y \leq 1\}$.

Satz 7.5 (Brouwer'scher Fixpunktsatz) Jede stetige Funktion

$f : \Delta \longrightarrow \Delta$ hat einen Fixpunkt.

Beweis. Definiere $f_1, f_2, f_3 : \Delta \longrightarrow [0,1]$

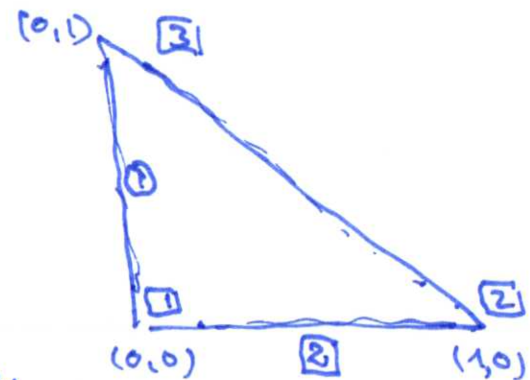


durch $$f(x,y) = (f_1(x,y), f_2(x,y))$$

und $$f_3(x,y) = 1 - f_1(x,y) - f_2(x,y).$$

Dann ist

$$f_1(x,y) + f_2(x,y) + f_3(x,y) = 1 = x + y + (1-x-y)$$



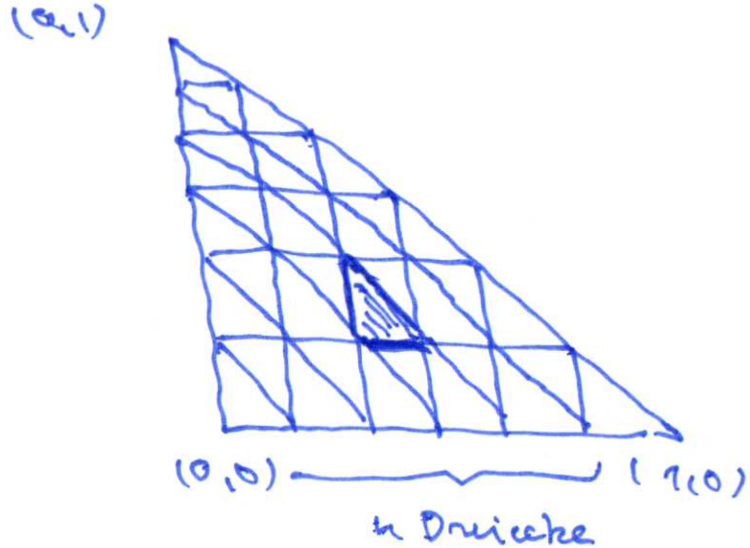
Daher gibt's $h : \Delta \longrightarrow \{1,2,3\}$ mit

$$h(x,y) = 1 \implies f_1(x,y) \geq x$$
$$h(x,y) = 2 \implies f_2(x,y) \geq y$$
$$h(x,y) = 3 \implies f_3(x,y) \geq 1-x-y.$$

Wir dürfen dabei annehmen:

- $h(0,0) = 1$, $h(1,0) = 2$, $h(0,1) = 3$
- $h(x,0) = 2$ für $x \in (0,1)$
- $h(0,y) = 1$ für $y \in (0,1)$
- $h(t,1-t) = 3$ für $t \in (0,1)$

Für $n \in \mathbb{N}$ wenden wir das Lemma von Sperner auf



an. Dies liefert z_n, z_n', z_n'' mit

$$h(z_n) = 1,\ h(z_n') = 2,\ h(z_n'') = 3$$

$$\| z_n - z_n' \|, \| z_n - z_n'' \|, \| z_n - z_n'' \| \leq \frac{\sqrt{2}}{n}$$

Nach Bolzano-Weierstraß in 2 Dimensionen gibt's eine Teilfolge $(z_{n(k)})_{k \in \mathbb{N}}$, die gegen einen Punkt ξ konvergiert.

Schreibe $z_n = (x_n, y_n)$ für alle $n \in \mathbb{N}$ und $\zeta = (\xi, \upsilon)$.

Für alle $k \in \mathbb{N}$ ist $h(z_{n(k)}) = 1$, d.h. $f_1(z_{n(k)}) \geq x_{n(k)}$.

Im Limes $k \to \infty$ erhalten wir $f_1(\zeta) \geq \xi$.

Da auch $\lim\limits_{k \to \infty} z'_{n(k)} = \lim\limits_{k \to \infty} z''_{n(k)} = \zeta$

erhalten wir analog $f_2(\zeta) \geq \upsilon$, $f_3(\zeta) \geq 1 - \xi - \upsilon$.

~~ta~~ Da

$$f_1(\zeta) + f_2(\zeta) + f_3(\zeta) = 1 = \xi + \upsilon + (1 - \xi - \upsilon)$$

gilt überall Gleichheit, d.h.

$$f_1(\zeta) = \xi, \quad f_2(\zeta) = \upsilon.$$

Somit

$$f(\zeta) = (f_1(\zeta), f_2(\zeta)) = (\xi, \upsilon) = \zeta,$$

d.h. ζ ist ein Fixpunkt von f. $\square$

Setze $D = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : x^2 + y^2 \leq 1\}$.

Folgerung 7.5. Jede stetige Fkt. $f : D \to D$ hat einen Fixpunkt.

Beweis. Sei $h : \Delta \to D$ eine stetige Bijektion, für die h^{-1} auch stetig ist (!)

$$\Delta \xrightarrow{h} D \xrightarrow{f} D \xrightarrow{h^{-1}} \Delta$$

Dann ist $(h^{-1} \circ f \circ h) : \Delta \to \Delta$ stetig. Nach Satz 7.4 gibt's $z \in \Delta$ mit

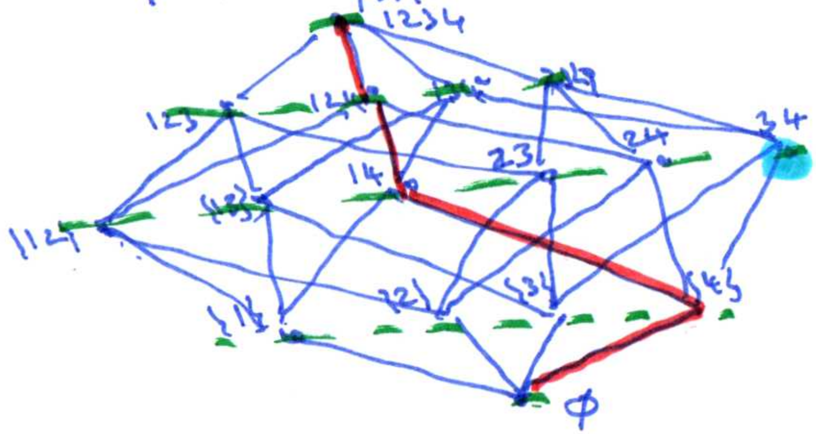
$$h^{-1}(f(h(z))) = z.$$

Nun ist $f(h(z)) = h(z)$, d.h. $h(z)$ ist Fixpunkt von f. $\square$

• • • • •

Erinnerung Für jede Menge X ist $(\mathcal{P}(X), \subseteq)$ eine partielle Ordnung. Man nennt $\mathfrak{A} \subseteq \mathcal{P}(X)$ eine Antikette, wenn $F \not\subseteq G$ für alle verschiedenen $F, G \in \mathfrak{A}$ gilt.

$X = [4]$



Satz 7.6 (Sperner) Sei X eine Menge mit $|X| = n$. Für jede Antikette $\mathfrak{A} \subseteq \mathcal{P}(X)$ gilt $|\mathfrak{A}| \leq \binom{n}{\lfloor n/2 \rfloor}$.

Beweis. Man nennt $(A_0, A_1, \ldots, A_n)$ eine **maximale Kette**, wenn $|A_i| = i$ für alle $i \in [0, n]$ und
$A_0 \subseteq A_1 \subseteq A_2 \subseteq \ldots \subseteq A_n = X$.

Es sei $\mathcal{K}$ die Menge der maximalen Ketten.

Dann ist $|\mathcal{K}| = n!$ Für jede Menge $A \subseteq X$ gibt's $|A|!\,(n-|A|)!$ maximale Ketten, in denen A vorkommt. Uns interessiert

$$\Phi = \{(K, A) : K \in \mathcal{K},\ A \in \mathfrak{A},\ A \text{ kommt in } K \text{ vor}\}.$$

Dann ist

$$\Phi = \sum_{A \in \mathfrak{A}} |A|!\,(n-|A|)!$$

Da $\mathfrak{A}$ Antikette ist, kommt in jeder maximalen Kette höchstens ein Element von $\mathfrak{A}$ vor. Also

$$\Phi \leq |\mathcal{K}| = n!$$

Damit wissen wir

$$\sum_{A \in \mathfrak{A}} |A|!\,(n-|A|)! \leq n!,$$

d.h.

$$\sum_{A \in \mathfrak{A}} \frac{1}{\binom{n}{|A|}} \leq 1.$$

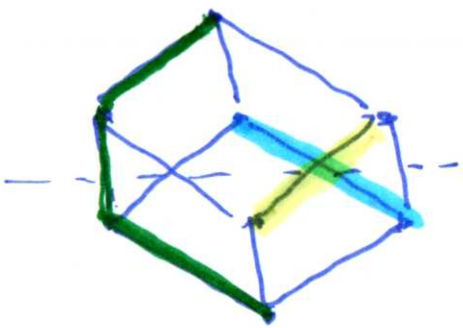
Wir wissen $\binom{n}{k} \leq \binom{n}{\lfloor n/2 \rfloor}$ für alle $k \in [0,n]$.

Folglich

$$1 \geq \sum_{A \in \mathfrak{A}} \frac{1}{\binom{n}{\lfloor n/2 \rfloor}} = \frac{|\mathfrak{A}|}{\binom{n}{\lfloor n/2 \rfloor}},$$

d.h.

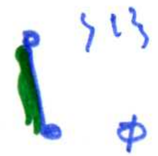
$$|\mathfrak{A}| \leq \binom{n}{\lfloor n/2 \rfloor}. \qquad \square$$



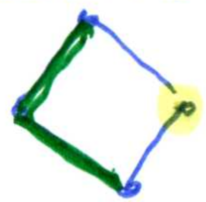
Man nennt $(A_k, \dots, A_\ell)$ eine symmetrische Kette in $\mathcal{P}(X)$ wenn

- $|A_i| = i$ für alle $i \in [k, \ell]$
- $k + \ell = |X|$
- $A_k \subseteq A_{k+1} \subseteq \dots \subseteq A_\ell \subseteq X$.

<u>Satz 7.7.</u> Für jede endliche Menge X gibt's eine Partition von $\mathcal{P}(X)$ in symmetrische Ketten.



$n = 1$



$n = 2$

<u>Beweis.</u> Induktion nach $n = |X|$.

<u>Ind. Anf.</u> | Siehe oben.

<u>Ind. Schritt</u> | Sei $|X| = n + 1$. Schreibe $X = Y \dot\cup \{x\}$

wobei $|Y| = n$. Nach Ind. Ann. gibt's eine Partition

$$\mathcal{P}(Y) = \dot{\bigcup_{i \in [m]}} e_i .$$

Für jede symm. Kette

$$e_i = (A_k, \ldots, A_\ell)$$

sind

$$e_i' = (A_k, \ldots, A_\ell, A_\ell \cup \{x\})$$

und

$$e_i'' = (A_k \cup \{x\}, \ldots, A_{\ell-1} \dot{\cup} \{x\})$$

symmetrische Ketten in $\mathcal{P}(X)$. Nun ist

$$\mathcal{P}(X) = \dot{\bigcup_{i \in [m]}} e_i' \;\dot{\cup}\; \dot{\bigcup_{i \in [m]}} e_i''$$

die gesuchte Partition(!)

$\square$