§7. Doppeltes abzählen.

Beispiel 7.1. Beim Beweis der Formel $\sum_{x \in V} d(x) = 2|E|$, die für jeden Graphen $G = (V, E)$ gilt, haben wir $\{(x, e) \in V \times E : x \in e\}$ auf zwei Arten abgezählt.

Satz 7.2. Für alle $n \in \mathbb{N}$ ist $\sum_{k=1}^{n} \binom{n}{k} \cdot k^2 = 2^{n-1} \cdot n + 2^{n-2} \cdot n(n-1)$.

Beweis. Im Parlament sind n Leute. Es wird ein Untersuchungsausschuss gebildet. Der Ausschuss hat einen Vorsitzenden und einen Sekretär. Wieviele Möglichkeiten gibt es?

Einerseits: Der Ausschuss hat eine Größe k mit $1 \le k \le n$.

Wenn man k kennt,

– gibt's $\binom{n}{k}$ Möglichkeiten für den Ausschuss,

- bei festem Ausschuss gibt's k Möglichkeiten für den Vorsitzenden und k Möglk. für den Sekretär.

Also gibt's für jedes k genau $\binom{n}{k} \cdot k^2$ Möglk. und insgesamt $\sum_{k=1}^{n} \binom{n}{k} k^2$.

Andererseits: Wenn der Vorsitzende gleichzeitig der Sekretär ist,

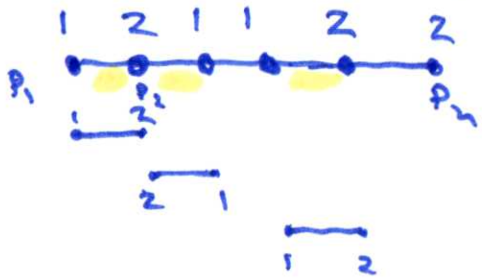
- gibt's n Möglichkeiten für diese Person,
- und 2^{n-1} Möglk. für den Rest des Ausschusses

Wenn der Vorsitzende und der Sekretär verschieden sind

- gibt's $n(n-1)$ Möglk. für diese beiden Personen
- 2^{n-2} Möglk. für den Rest des Ausschusses.

Insgesamt $n \cdot 2^{n-1} + n(n-1) \cdot 2^{n-2}$.

$\square$



Satz 7.3. Die Punkte $P_1, P_2, \dots, P_n$ mögen in dieser Reihenfolge auf einer Geraden liegen.

Jedem werde eine der Zahlen 1 oder 2 zugeordnet.

Dabei werde P_1 die Zahl 1 und P_n die 2 zugeordnet.

Dann gibt's ungerade viele Teilstrecken $P_i P_{i+1}$, an deren Endpunkten verschiedene Zahlen stehen.

Erster Beweis Induktion nach n.

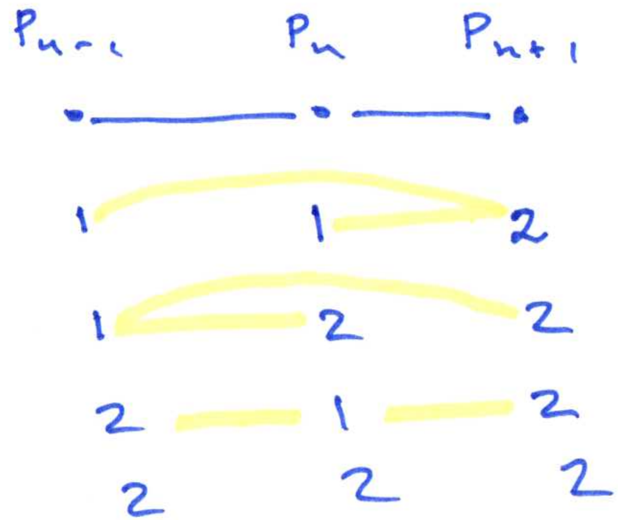
$n = 2$ | 

klar.

$n \to n+1$ | Betrachte nur P_{n-1}, P_n, P_{n+1}.

Es gebe k solche Strecken, wenn man P_n weglässt und l, wenn man P_n nicht weglässt.

Wir wissen, dass k ungerade ist und wollen zeigen, dass l ungerade ist.



$k = l$

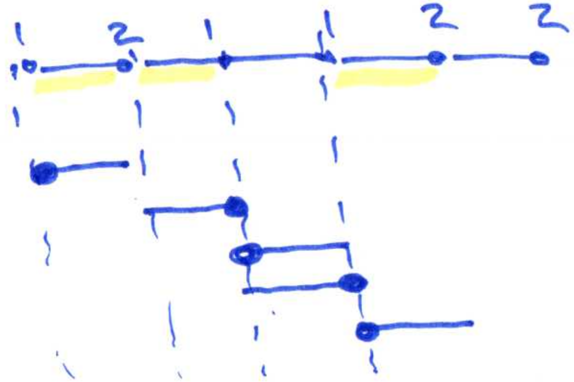
$k = l$

$l = k + 2$

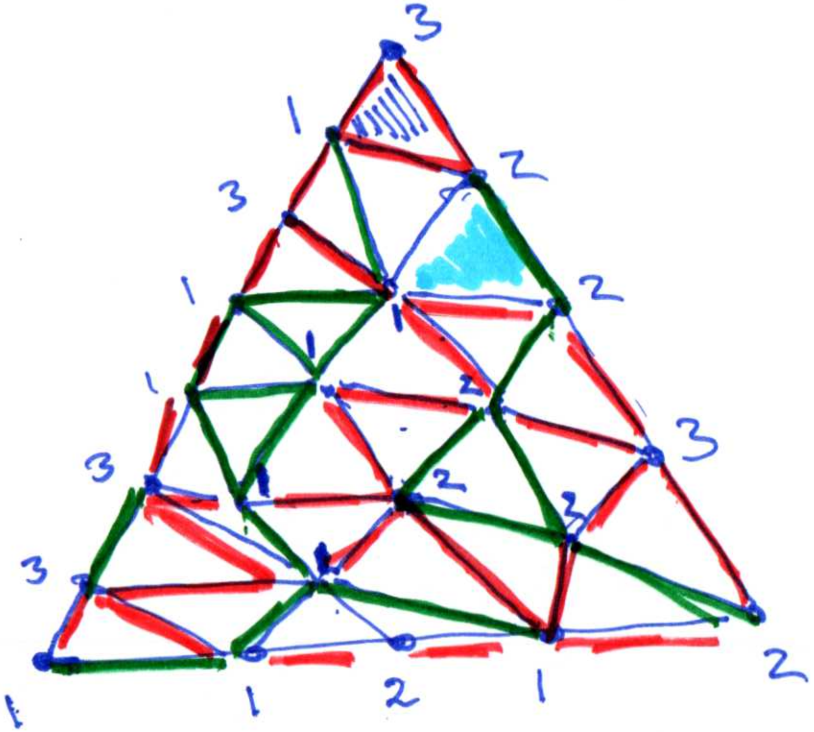
$\square$

<u>Zweiter Beweis.</u> Betrachte alle Paare (S, P), wobei

- S eine der Strecken $P_1P_2, P_2P_3, \ldots, P_{n-1}P_n$
- p ein Endpunkt von S ist, dem die Zahl 1 zugeordnet wird.



Für jeden Punkt, dem die 1 zugeordnet ist, mit Ausnahme von P_1, gibt's zwei solche Paare. Für P_1 aber nur eines. Also ist die Anzahl der gerichteten Paare ungerade. Andererseits tragen die Strecken vom Typ $\overset{1}{\bullet}\!-\!\overset{1}{\bullet}$ und $\overset{2}{\bullet}\!-\!\overset{2}{\bullet}$ je gerade viele solche Paare bei und die Strecken vom Typ $\overset{1}{\bullet}\!-\!\overset{2}{\bullet}$ oder $\overset{2}{\bullet}\!-\!\overset{1}{\bullet}$ ungerade viele. Deshalb gibt's ungerade viele Strecken ~~mit~~, deren Endpunkten die Zahlen 1, 2 zugeordnet wurden. $\square$



Triangulation

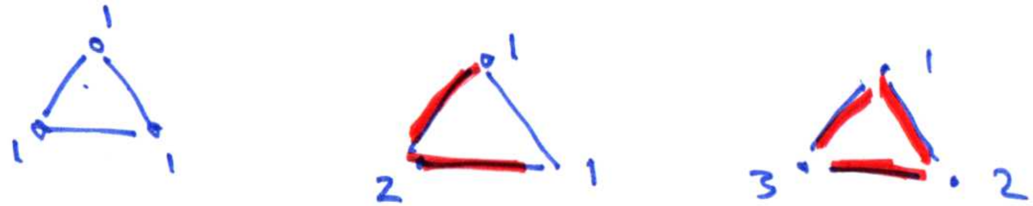
Satz 7.4 (Sperner). Bei einer Triangulation eines Dreiecks $A_1 A_2 A_3$ werden den Ecken Zahlen aus der Menge $\{1,2,3\}$ zugeordnet. Wenn A_i die Zahl i zugeordnet wird (für alle $i \in [3]$) und allen inneren Ecken der Strecke $A_i A_j$ nur die Zahlen i,j zugeordnet werden, dann gibt's ungerade viele Dreiecke vom Typ

.

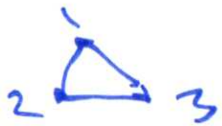
Beweis. Es sei Φ die Anzahl der Paare (K, T), die aus einer Kante K, ~~an~~ deren Endecken ~~die gleiche~~ verschiedene Zahlen zugeordnet werden und einem an K grenzenden Dreieck bestehen.

Jede innere Kante K, deren ~~an~~ Endecken verschiedene Zahlen zugeordnet sind, trägt 2 zu Φ bei, Jede auf dem Rand liegende solche Kante 1.

Nach Satz 7.3 liegen auf jeder Dreiecksseite ungerade viele solche Strecken. Insgesamt ist Φ ungerade.



Also gibt's ungerade viele Dreiecke T, die einen ungeraden Beitrag zu Φ leisten. Dies sind genau die Dreiecke vom Typ



.

$\square$