13. Vorlesung.

Satz 6.14. Für jeden planaren Graphen $G = (V, E)$ mit mind. 3 Ecken gilt: Wenn alle Kreise in G mindestens Länge g haben, wobei $g \in \{3,4\}$ ~~$g \geq 3$~~, dann

$$|E| \leq \frac{g}{g-2}(|V|-2).$$

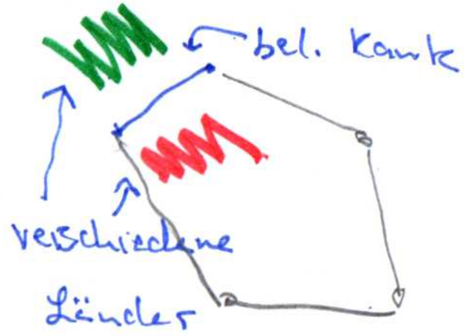
Beweis. Schritt 1: Wir zeigen die Behauptung für 2-zusammenhängende Graphen G.

Für jede Zahl $k \geq g$ gebe es f_k Länder, die von einem Kreis der Länge k berandet werden.

Dann hat G genau

$$F = \sum_{k \geq g} f_k$$

Länder. Da jede Kante auf einem Kreis liegt, grenzen an jede Kante 2 verschiedene Länder.



Die Anzahl der Paare (e, L), die aus einer Kante e und einem an e grenzenden Land bestehen, ist

$$2|E| = \sum_{k \geq g} k f_k$$

Nach Satz von Euler ist $|E| + 2 = |V| + F$, d.h.

$$g \cdot (|V| - 2) = g(|E| - F) = g\Big(\sum_{k \geq g} \frac{k}{2} f_k - \sum_{k \geq g} f_k\Big)$$

$$= g \sum_{k \geq g} \Big(\frac{k}{2} - 1\Big) f_k .$$

Für alle $k \geq g$ ist $g\left(\frac{k}{2} - 1\right) \geq (g-2) \cdot \frac{k}{2}$

(denn dies ist $\Longleftrightarrow \cancel{\frac{gk}{2}} - g \geq \cancel{\frac{gk}{2}} - k$

$\Longleftrightarrow k \geq g$)

Somit $g(|V| - 2) \geq \sum_{k \geq g} (g-2) \frac{k}{2} f_k = \frac{g-2}{2} \sum_{k \geq g} k f_k$

$= \frac{g-2}{\cancel{2}} \cdot \cancel{2}|E| = (g-2)|E|$.

Dies zeigt $|E| \le \frac{g}{g-2}(|V|-2)$

<u>Schritt 2</u> Nun beweisen wir die Behauptung mit Ind. nach $n := |V|$.

<u>$n=3$</u>| <u>Fall 1:</u> $g = 3$.

Nun ist $|E| \le 3 = \frac{3}{3-2}\cdot(3-2)$

$$= \frac{g}{g-2}(|V|-2)$$

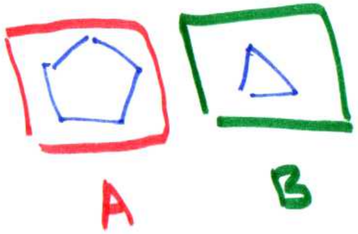
<u>Fall 2:</u> $g \ge 4$.

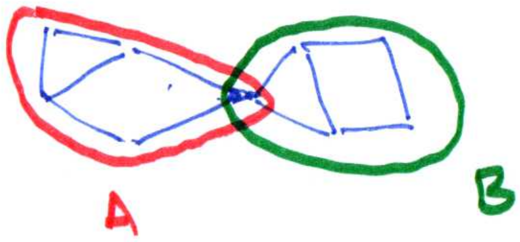
Nun ist $|E| \le 2 \le \frac{4}{4-2}(3-2)$.

<u>Induktionsschritt</u> | Sei $n \ge 4$ und die Behauptung gelte für alle Graphen mit weniger als n Ecken.

Wenn G 2-zsh. ist, wissen wir die Beh. bereits.

Nun sei G nicht 2-zsh.





Dann gibt's zwei Mengen A, B mit

- $V \subseteq A \cup B$
- $|A \cap B| \leq 1$
- $E = E(G[A]) \,\dot\cup\, E(G[B])$

Nun ist $n \leq |A| + |B| \leq n + 1$.

Wir wollen die Induktionsannahme auf $G[A]$, $G[B]$ anwenden. Wenn $|A|, |B| \geq 3$ zeigt dies

$$|E| \leq E(G[A]) + E(G[B]) \leq \frac{g}{g-2}((|A|-2) + |B|-2)$$

$$= \frac{g}{g-2}(|A| + |B| - 4) \leq \frac{g}{g-2}(n-3) < \frac{g}{g-2}(n-2).$$

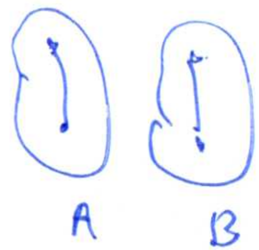
Wenn $|A| \geq 3$ und $|B| = 2$, dann benutzen wir

$$|E(G[B])| \leq 1 \leq \frac{g}{g-2}(|B|-1)$$

und erhalten analog

$$|E| \leq \dots \leq \frac{g}{g-2}(|A|-2+|B|-1)$$
$$\leq \frac{g}{g-2}(|A|+|B|-3) \leq \frac{g}{g-2}(n-2).$$

Der Fall $|A|=2$, $|B| \geq 3$ geht genauso. Es bleibt der Fall $|A| = |B| = 2$ zu diskutieren. Da $|A| + |B| \geq n \geq 4$ folgt $A \cap B = \emptyset$, $n=4$



und $|E| \leq 2 \leq \frac{g}{g-2} \cdot (4-2)$.

$\square$

<u>Folgerung 6.15.</u> Für jeden planaren Graphen $G=(V,E)$ gilt

$$|E| \le 3|V| - 6.$$

Beweis: Setze $g = 3$ ein. $\square$

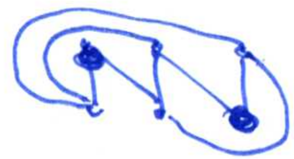
<u>Folgerung 6.16.</u> K_5 ist nicht planar.

<u>Beweis.</u> Angenommen doch. Dann

$$|E(K_5)| \le 3\cdot 5 - 6 = 9$$ <u>Wid.</u> $\square$

<u>Folgerung 6.17.</u> Für jeden dreiecksfreien ebenen Graphen $G=(V,E)$ gilt $|E| \le 2|V| - 4$.

<u>Beweis.</u> Setze $g=4$ in Satz 6.14 ein. $\square$

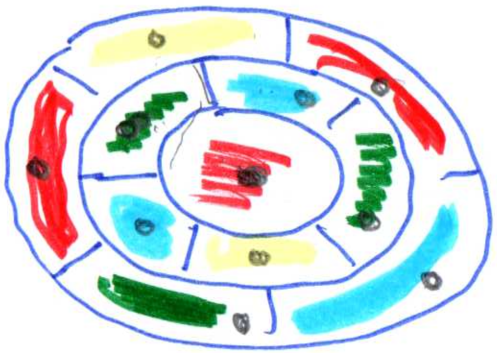


<u>Folgerung 6.18.</u> $K_{3,3}$ ist nicht planar.

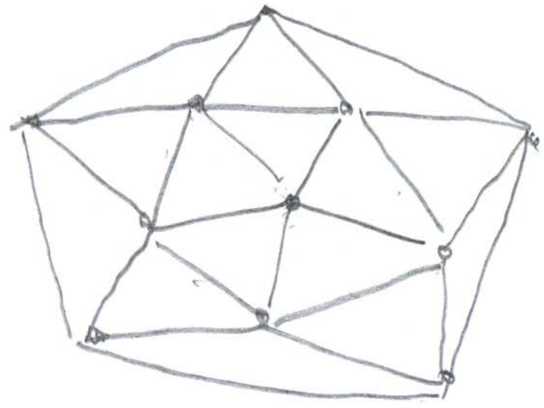
<u>Beweis.</u> Da $K_{3,3}$ dreiecksfrei ist, wäre sonst $9 = E(K_{3,3}) \le 2\cdot 6 - 4 = 8$ <u>Wid.</u> $\square$

— Der 4-Farbensatz —

In jeder Landkarte kann man die Länder so mit 4 Farben färben, dass benachbarte Länder verschiedenfarbig sind.



Landkarte



Duale Ebene Graph.

~~Der~~ duale ebene Graph muss so gefärbt werden, dass benachbarte Ecken verschiedene Farben erhalten.

<u>Dfn 6.19.</u> Seien $G = (V, E)$ ein bel. Graph und $k \in \mathbb{N}$.

Eine k-Färbung von G ist eine Abbildung $f: V \to [k]$

mit der Eigenschaft, dass $f(x) \neq f(y)$ für jede Kante $\{x, y\} \in E$ gilt. Die Zahl

$$\chi(G) = \min\{k \in \mathbb{N} : G \text{ hat eine } k\text{-Färbung}\}$$

heißt <u>chromatische Zahl</u> von G.

Der 4-Farbensatz sagt $\chi(G) \leq 4$ für alle planaren Graphen G.

<u>Lemma 6.20.</u> Jeder ~~planare~~ Graph G hat eine Ecke x mit $d(x) \leq 5$.

<u>Beweis.</u> Übung.

<u>Folgerung 6.21.</u> Für jeden planaren Graphen G gilt

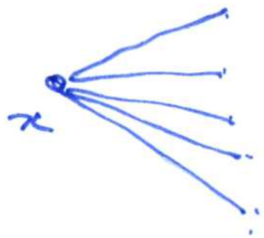
$$\chi(G) \leq 6.$$

<u>Beweis.</u> Induktion nach $n = |V(G)|$.

$n \leq 6$ | Man gibt jeder Ecke ihre eigene Farbe.

$n \to n+1$ | Wähle $x \in V(G)$ mit $d(G) \leq 5$.

Nach Ind. Ann. hat $G - x$ eine 6-Färbung.



Diese Färbung kann man zu einer 6-Färbung von G fortsetzen, indem man x eine Farbe gibt, die kein Nachbar von x hat. □

<u>Satz 6.22.</u> Für jeden planaren Graphen G gilt $\chi(G) \leq 5$.

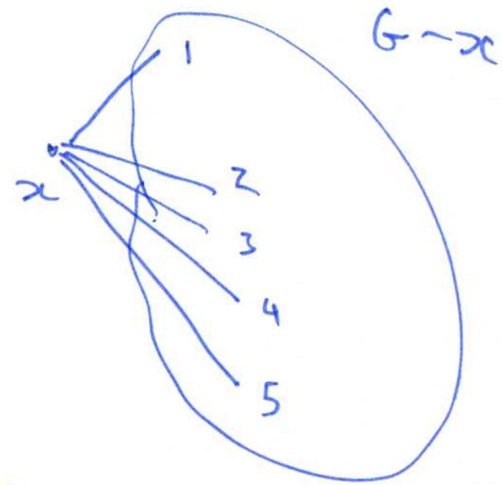
<u>Beweis.</u> Induktion nach $n = |V(G)|$.

<u>$n \leq 5$</u> Jeder Ecke erhält ihre eigene Farbe.

<u>$n \to n+1$</u> Sei G planarer Graph mit $|V(G)| = n+1$.

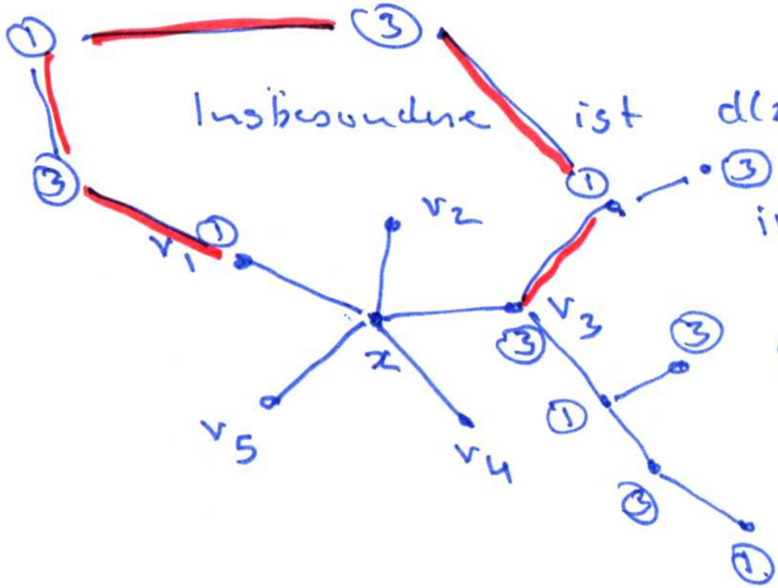
Wähle eine Ecke $x \in V(G)$ mit $d(x) \leq 5$.

<u>Fall 1:</u> $G - x$ hat eine 5-Färbung f mit der Eigenschaft $f[N(x)] \neq [5]$



Dann kann man f zu einer 5-Färbung von G fortsetzen.

<u>Fall 2:</u> Für jede 5-Färbung f von $G - x$ gilt $f[N(x)] = [5]$.

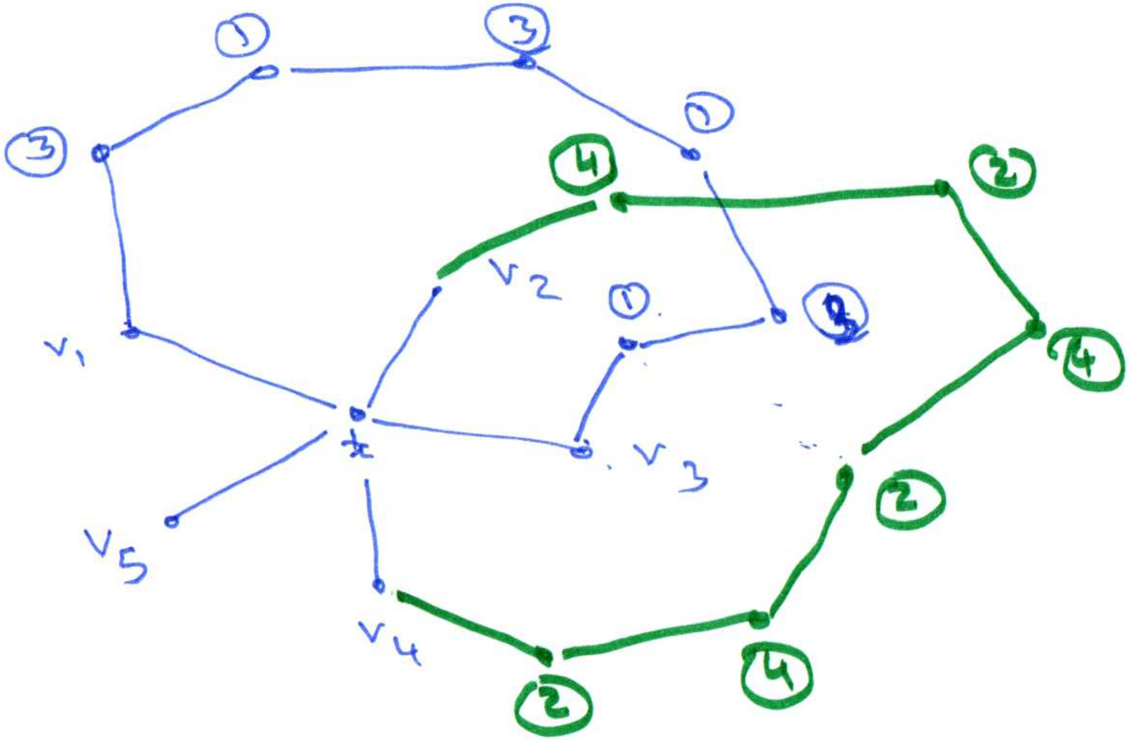


Insbesondere ist $d(x) = 5$. Die Nachbarn von x seien im Uhrzeigersinn v_1, v_2, v_3, v_4, v_5.

Sei f eine 5-Färbung von $G-x$ mit $f(v_i)=i$ für alle $i \in [5]$.

Betrachte die v_3 enthaltende Komponente des von den Farbklassen $f^{-1}(1) \cup f^{-1}(3)$ induzierten Teilgraphen von G. Man kann alle Ecken dieser Komponente gleichzeitig umfärben (d.h. die Farben 1,3 vertauschen). Da wir in Fall 2 sind zeigt dies, dass v_1 auch in dieser Komponente liegt.

Es gibt also einen Weg von v_1 nach v_3, auf dem sich die Farben 1, 3 abwechseln.



analog gibt's einen Weg von v_2 nach v_4, auf dem sich die Farben 2, 4 abwechseln. Wid. (zu G planar).