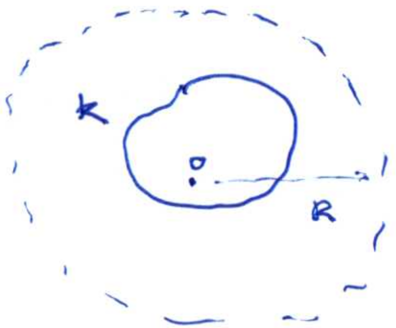
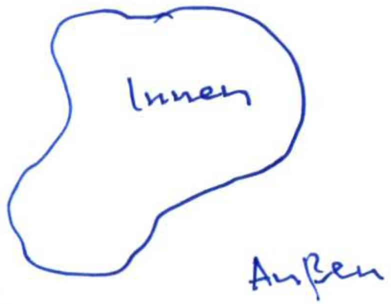
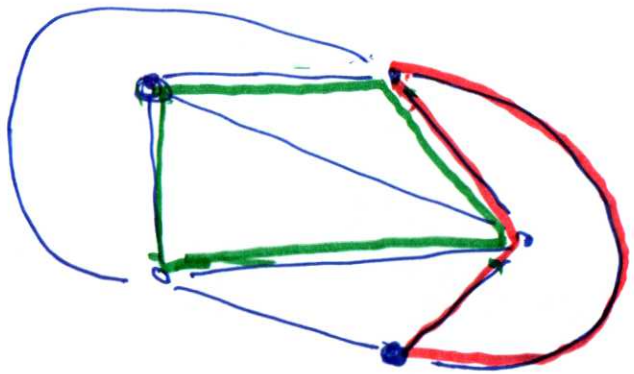


Jordan-Kurven sind kompakt und daher beschränkt. Es gibt also ein $R > 0$ mit der Eigenschaft, dass k in der Kreisscheibe $D = \{ (x,y) \in \mathbb{R}^2 : x^2 + y^2 \leq R^2 \}$ enthalten ist. Da $\mathbb{R}^2 \setminus D$ zsh. ist, ist $\mathbb{R}^2 \setminus D$ in einer der beiden Komponenten von $\mathbb{R}^2 \setminus k$ enthalten. Diese Komponente heißt die <u>äußere Komponente</u> von $\mathbb{R}^2 \setminus k$; die andere heißt innere Komponente.





Jeder Kreis in einem Graphen entspricht in einer Einbettung des Graphen einer Jordankurve.

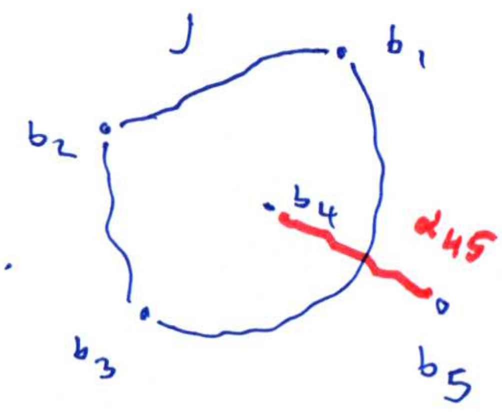
Dfn 6.8. Es sei (b, α) eine Einbettung des ebenen Graphen $G = (V, E)$. Die zsh. Komponenten von

$$\mathbb{R}^2 \setminus \left(\bigcup_{e \in E} \alpha(e) \cup b[V] \right)$$

heißen die Länder von (b, α).

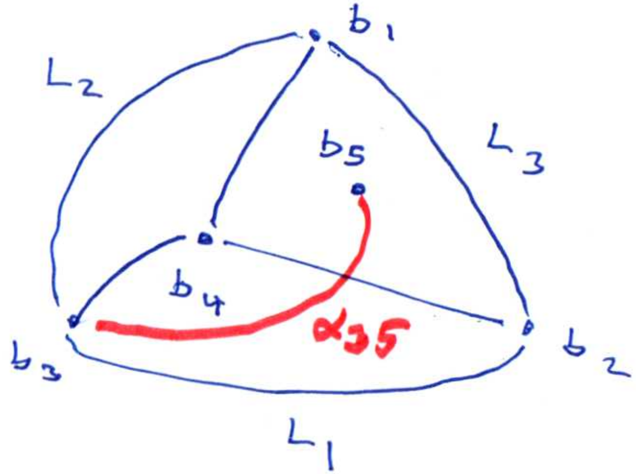
Bem. 6.9. K_5 ist nicht planar.

Beweisskizze: Seien $1, 2, 3, 4, 5$ die Ecken des K_5. In einer Einbettung von K_5 mögen sie den Punkten $b_1, \dots, b_5$ entsprechen. Die Kante $\{i, j\}$ möge der einfachen Kurve α_{ij}.



Nun ist $J = \alpha_{12} \cup \alpha_{13} \cup \alpha_{23}$ eine Jordan Kurve. Sie ist zu α_{45} disjunkt. Also liegen

b_4, b_5 beide in der inneren oder beide in der äußeren Komponente von $\mathbb{R}^2 \setminus J$. Wir betrachten nur den Fall, dass beide in der inneren Komponente liegen.



Nun sind

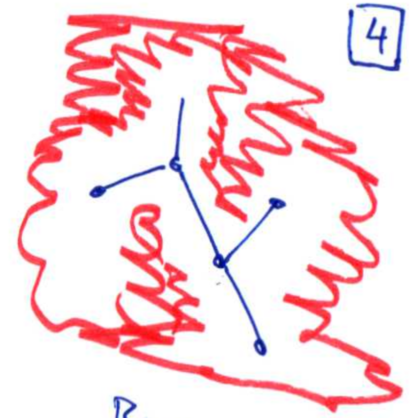
$$L_1 = \alpha_{23} \cup \alpha_{24} \cup \alpha_{34}$$

$$L_2 = \alpha_{13} \cup \alpha_{34} \cup \alpha_{41}$$

$$L_3 = \alpha_{12} \cup \alpha_{24} \cup \alpha_{41}$$

Jordan-Kurven. Ihre inneren Komponenten partitionieren die innere Komponente von $\mathbb{R}^2 \setminus J$ (bis auf $\alpha_{14} \cup \alpha_{24} \cup \alpha_{34}$). Daher liegt b_5 o.B.d.A in der inneren Komponente von $\mathbb{R}^2 \setminus L_3$. Aber b_3 ist in der äußeren Komponente. Also schneiden sich α_{35}, L_3.

Wid.

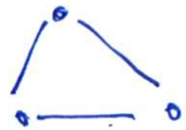


Baum

Lemma 6.10. Ist G ein 2-zsh. planarer Graph, so werden bei jeder Einbettung von G die Länder von Kreisen berandet.

Beweis. Induktion nach $|E(G)|$ mit Satz 4.25.

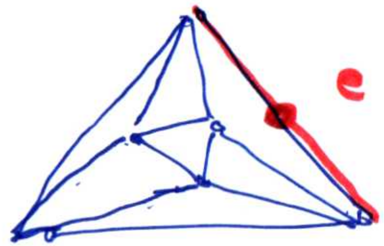
Anfang: $G = K_3$ |



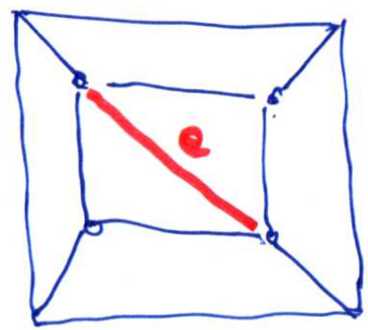
Klar nach Jordan'schem Kurvensatz.

$G \longrightarrow G \,\%\, e$ (wobei $e \in E(G)$) |

Bei Kantenunterteilungen ändern sich die Länder nicht.

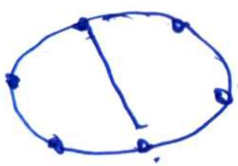


$G \longrightarrow G + e$ (wobei $e \notin E(G)$)



G

Die neue Kante ist in einem Land enthalten. Dieses wird



nach Ind. Ann. von einem Kreis berandet.

Also entstehen zwei neue Länder, deren Ränder Kreise durch e sind. □

<u>Satz 6.11 (Kuratowski)</u> Ein Graph G ist genau dann planar, wenn er weder eine Unterteilung des K_5 noch eine Unterteilung des $K_{3,3}$ enthält.

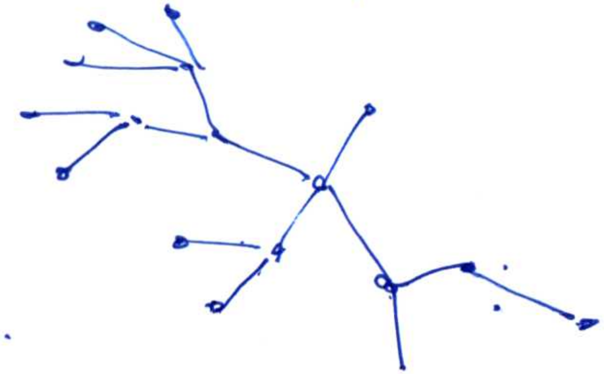
<u>Beweis.</u> Man hört Graphentheorie 1.

<u>Satz 6.12 (Euler)</u> Sei $G = (V, E)$ ein zusammenhängender planarer Graph. Wenn G eine Einbettung mit F Ländern hat, dann ist

$$|E| + 2 = |V| + F.$$

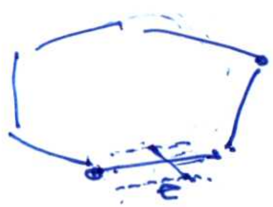
<u>Beweis.</u> Bei festem V mit Ind. nach $|E|$.

<u>$|E| \leq |V|-1$</u> Da G zsh. ist, enthält G einen Baum. Dieser hat $|V|-1$ Kanten. Also ist G ein Baum und $|V|-1 = |E|$. Außerdem hat G nur ein Land, d.h. $F = 1$.



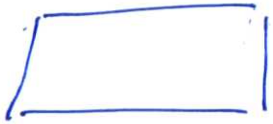
Also $|E| + 2 = |V| + 1 = |V| + F$.

<u>Schritt</u> Nun sei $G = (V, E)$ ein planarer Graph mit $|E| \geq |V|$. Da G kein Baum ist, gibt's eine Kante $e \in E(G)$, die auf einem Kreis liegt. Nun ist $G' = G - e$ zsh. Außerdem hat G' eine Einbettung mit $F-1$ Ländern. Nach Ind. Ann. ist also



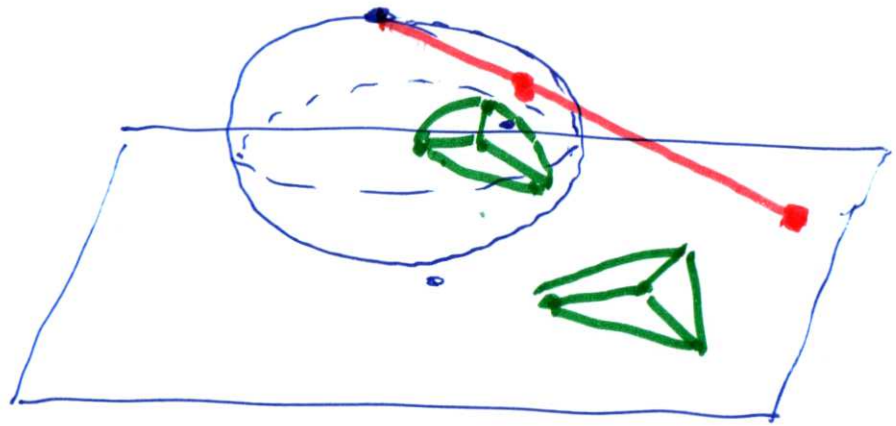
$$|E(G')| + 2 = |V(G')| + (F-1),$$

d.h. $$|E| + 2 = |V| + F. \qquad \square$$



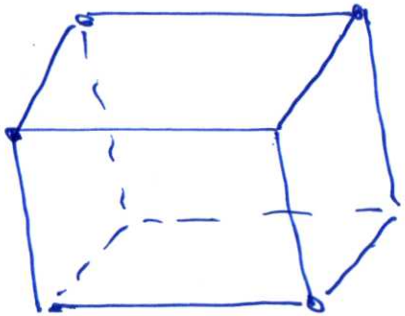
Ebene, $\mathbb{R}^2$

$S^2 \setminus \{\infty\}$

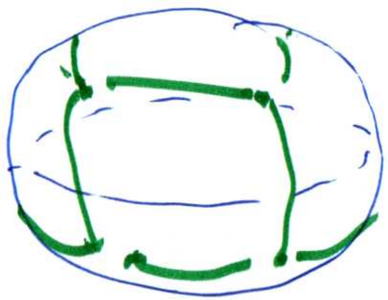


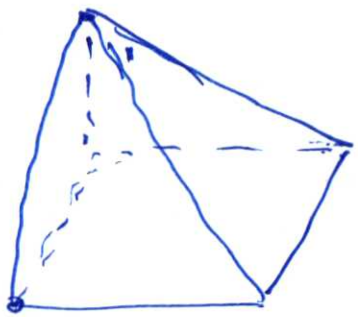
Stereographische Projektion.

Polyeder



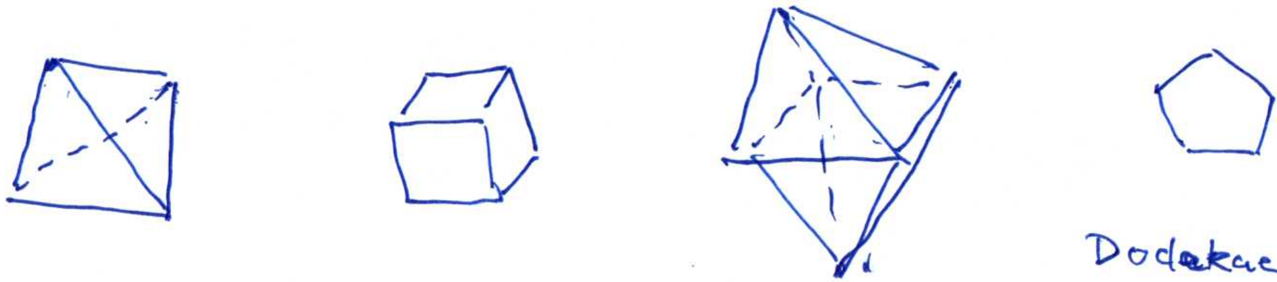
8 Ecken
12 Kanten
6 Flächen





5 Ecken
5 Flächen
8 Kanten

Platonische Körper

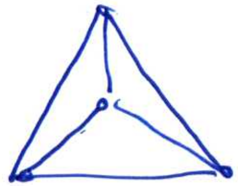
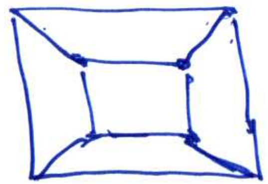
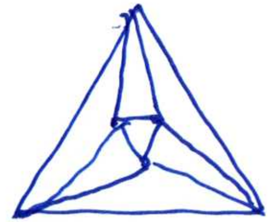


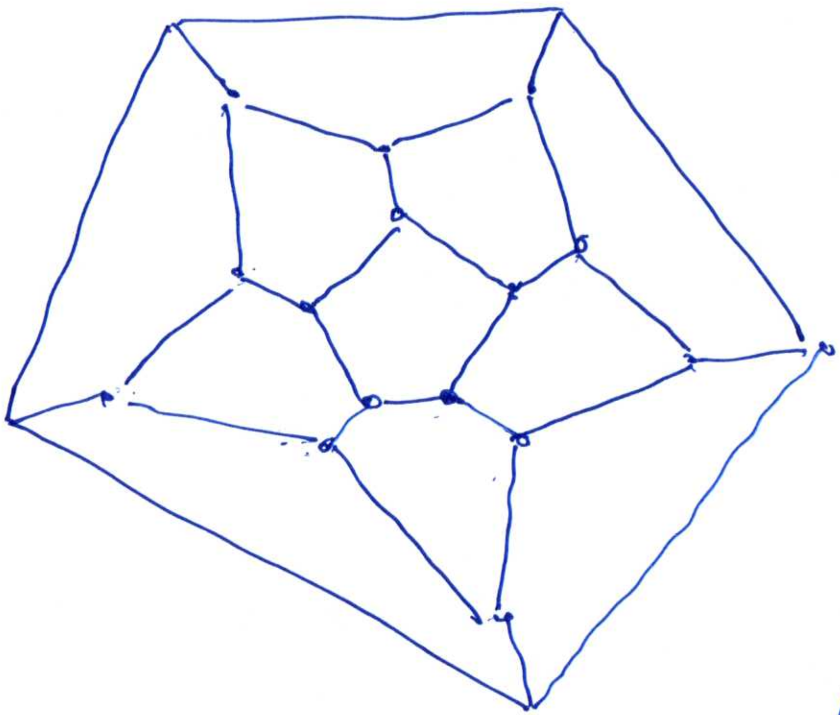
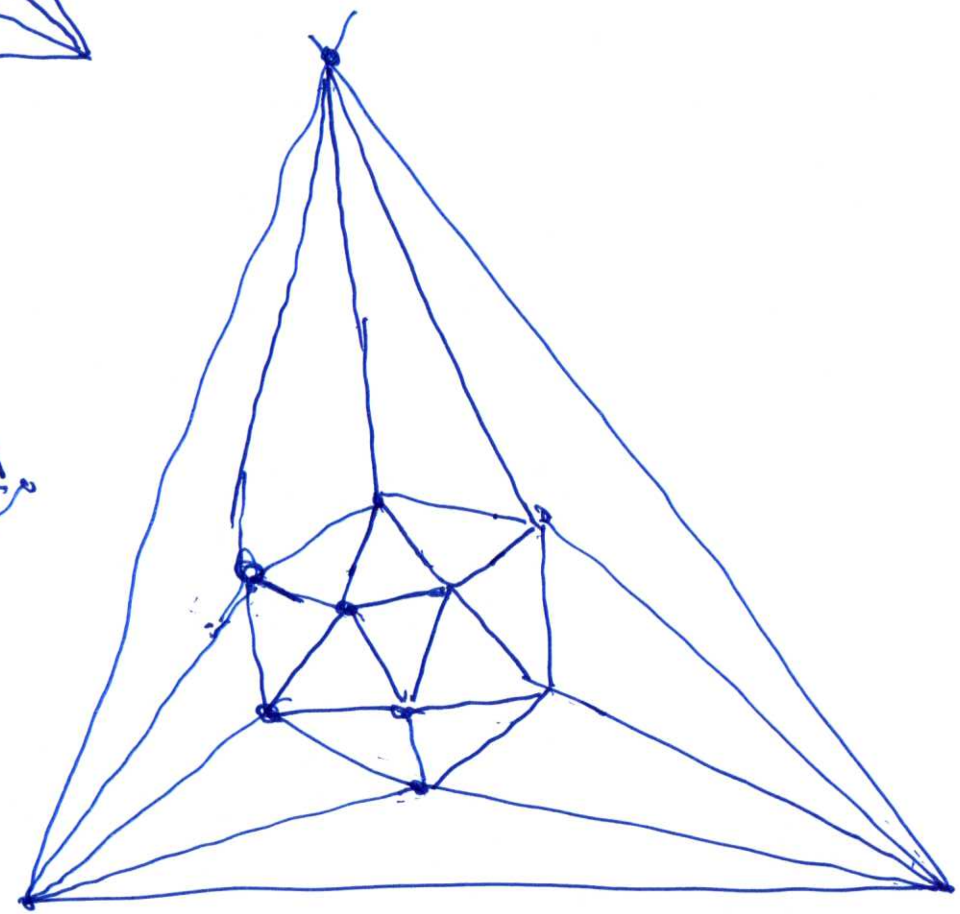
Dodekaeder Ikosaeder

Jede Fläche ist ein regelmäßiges n-Eck

An jeder Ecke stoßen gleich viele Flächen zusammen.

Satz 6.13 (Platon) Seien $d, k \geq 3$ natürliche Zahlen und G ein 2-zsh. planarer Graph, bei dem jede Ecke Grad d hat. Bei einer Einbettung von G werde jedes Land von einem Kreis der Länge k berandet. Dann ist G zu einem dieser 5 Graphen isomorph:

<u>Beweis (Skizze)</u> Sei $G = (V, E)$ so ein Graph,

$|V| = n$, $|E| = m$. Die Einbettung habe F Länder.

Wegen

$$\sum_{x \in V} d(x) = 2|E|$$

ist $d \cdot n = 2 \cdot m$. Da jede Kante zum Rand zweier Länder gehört, ist auch

$$k \cdot F = 2 \cdot m$$

Aus Satz 6.13 folgt also

$$2 = n + F - m = \frac{2m}{d} + \frac{2m}{k} - m,$$

d.h. $\frac{1}{m} + \frac{1}{2} = \frac{1}{d} + \frac{1}{k}$.

Wäre $d, k \geq 4$, dann $\frac{1}{d} + \frac{1}{k} \leq \frac{1}{4} + \frac{1}{4} \leq \frac{1}{2}$, <u>Wid.</u>

Dies zeigt $3 \in \{d, k\}$. Wäre $\max\{d, k\} \geq 6$, dann

$$\frac{1}{d} + \frac{1}{k} \leq \frac{1}{3} + \frac{1}{6} = \frac{1}{2}, \quad \underline{\text{Wid.}}$$

Somit $\max\{d, k\} \leq 5$. Insgesamt

$$(d, k) \in \{(3,3), (3,4), (3,5), (4,3), (5,3)\}.$$

d	k	m	n	F
3	3	6	4	4
3	4	12	8	6
4	3	12	6	8
3	5	30	20	12
5	3	30	12	20

$$\frac{1}{m} = \frac{1}{d} + \frac{1}{k} - \frac{1}{2}$$

$$n = \frac{2m}{d}$$

$$F = \frac{2m}{k}$$

Nun muss man diese 5 Fälle zu Ende analysieren $\square$