11. Vorlesung

Wiederholung

Ein Baum ist ein zsh. Graph, der keinen Kreis enthält.

Satz 5.2. Für einen Graphen $G = (V, E)$ sind äquivalent

(a) G ist Baum

(b) Für je zwei Ecken $x, y \in V$ gibt's genau einen Weg von x nach y.

(c) G ist maximal kreisfrei

(d) G ist minimal zsh.

(e) G ist zsh. und $|V| = |E| + 1$.

Wir wissen

$$\begin{array}{ccc} (a) & \Longrightarrow & (b) \\ \Uparrow & & \Downarrow \\ (d) & \Longleftarrow & (c) \end{array}$$

Jeder Baum mit mind. 2 Ecken hat mind. 2 Blätter

G Graph, x Blatt von G, dann

G Baum $\Longleftrightarrow$ $G - x$ Baum

Fortsetzung des Beweises von Satz 5.2.

(a) $\Rightarrow$ (e) | Wir zeigen $|V| = |E| + 1$ für jeden Baum $G = (V, E)$ durch Induktion nach $|V| =: n$.

$n = 1$ | Klar.

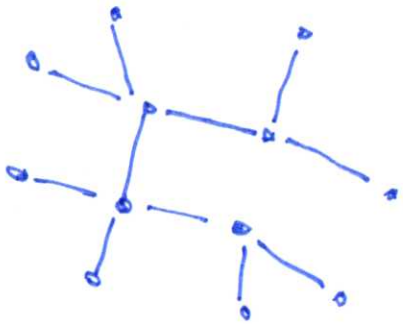
$n \to n+1$ | Sei $n \geq 1$ und G ein Baum mit $n+1$ Ecken. Dann hat G ein Blatt x und $G - x$ ist ein Baum. Nach Ind. Ann. ist

$$|V(G-x)| = |E(G-x)| + 1.$$

Offenbar $|V(G-x)| = |V| - 1$. Da x ein Blatt ist, gilt $|E(G-x)| = |E| - 1$. also

$$(|V| - 1) = (|E| - 1) + 1$$

und mithin $|V| = |E| + 1$.

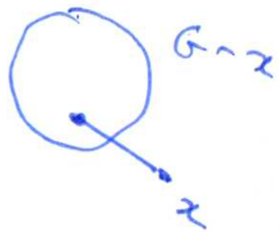


(e) $\Rightarrow$ (a) | Wir zeigen durch Ind. nach $n = |V|$, dass jeder zsh. Graph $G = (V, E)$ mit $|V| = |E| + 1$ ein Baum ist.

$n = 1$ | $\bullet$ klar.

$n-1 \to n$ | Sei G zsh. und $|V| = n$, $|E| = n-1$.

Da
$$\sum_{x \in V} d(x) = 2|E| = 2(n-1) < 2n$$



gibt's eine Ecke x mit $d(x) < 2$. Da G zsh. ist, muss $d(x) = 1$ sein, d.h. x ist ein Blatt.

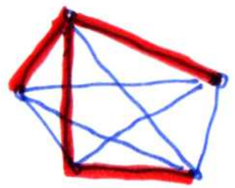
Da $V(G-x) = |V| - 1$, $|E(G-x)| = |E| - 1$ ist

$$|V(G-x)| = |E(G-x)| + 1.$$

Da $G-x$ zsh ist (denn G ist zsh. und x ist ein Blatt) ist $G-x$ nach nach Ind. Ann. ein Baum.

Folglich ist G ebenfalls ein Baum. $\square$

<u>Dfn. 5.6.</u> Sei $G = (V, E)$ ein Graph. Ein <u>aufspannender Baum</u> von G ist ein Teilgraph (V, E') von G, der ein Baum ist.



aufspannender Baum im K_5

<u>Lemma 5.7.</u> Ein Graph G besitzt genau dann einen aufspannenden Baum, wenn G zsh. ist.

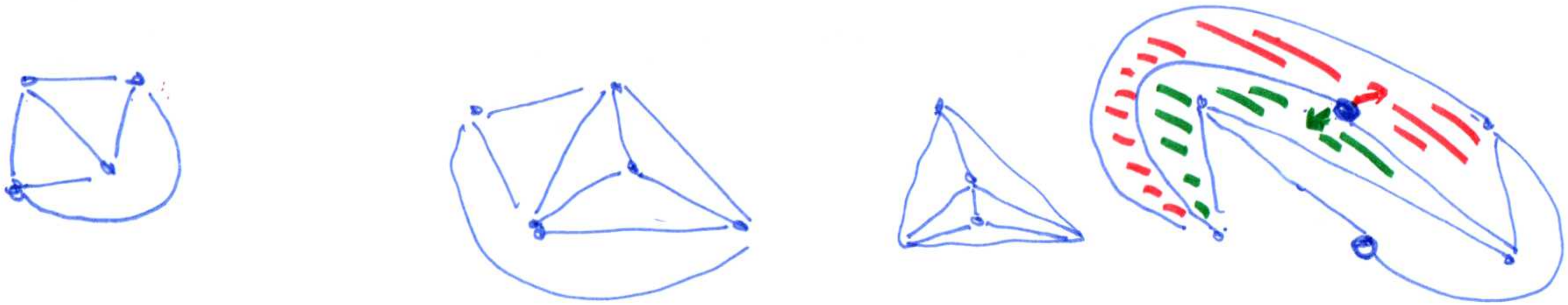
<u>Beweis.</u> <u>$\Rightarrow$]</u> Klar, da der aufspannende Baum zsh. sein muss.

<u>$\Leftarrow$]</u> Sei $G = (V, E)$ zsh. Wähle einen zsh. Teilgraphen $T = (V, E')$ von G mit $|E'|$ minimal. Dann ist T minimal zsh. Also ist T ein Baum (nach Satz 5.2 (c) $\Rightarrow$ (a)).

$\square$

§ 6. Ebene Graphen.

Mit "Ebene" meinen wir $\mathbb{R}^2$.



Dfn. 6.1. Man nennt $\alpha \subseteq \mathbb{R}^2$ eine <u>einfache Kurve</u>, wenn es eine ~~stetige~~ injektive Funktion $f : [0,1] \to \mathbb{R}^2$ mit

$$\alpha = \{ f(x) : x \in [0,1] \}$$ gibt.

stückweise linear

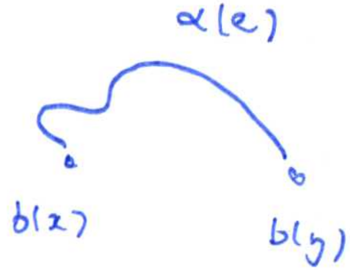
verboten (ung. injektiv)

Dfn 6.2. Eine <u>Einbettung</u> eines Graphen $G = (V, E)$ ist ein Paar (b, α), das aus einer

F[illegible]t inj. Funktion $b : V \longrightarrow \mathbb{R}^2$ und einer Funktion α, die den Kanten von G einfache Kurven zuordnet, besteht, wobei

- Für jede Kante $e = \{x, y\}$ sind $b(x)$, $b(y)$ die Endpunkte von $\alpha(e)$ und

$$\alpha(e) \cap b[V] = \{ b(x), b(y) \}$$

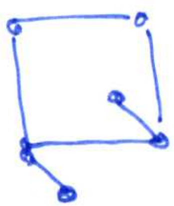
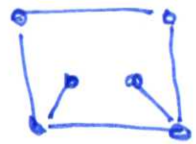


- Für alle verschiedenen $e, e' \in E$ ist

$$\alpha(e) \cap \alpha(e') \subseteq b[V]$$

Ein Graph heißt <u>planar</u>, wenn er eine Einbettung besitzt.

<u>Beispiele</u>.

 und  sind Einbettungen

des gleichen Graphen.

Dfn 6.3. Sei $A \subseteq \mathbb{R}^2$. Für $x, y \in A$ schreibe $x \approx_A y$ wenn es eine stetige Funktion $f : [0,1] \to A$ mit $f(0) = x$ und $f(1) = y$ gibt.

Lemma 6.4. Für jede Menge $A \subseteq \mathbb{R}^2$ ist $\approx_A$ eine Äquivalenzrelation.

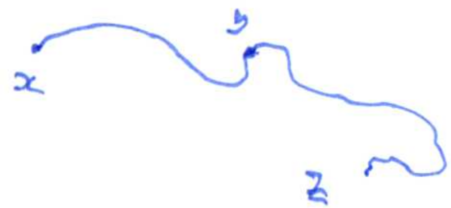
A

Beweis. Reflexiv | Für $x \in A$ ist die Konstante Funktion ~~f~~ $c_x : [0,1] \to A$, $c_x(t) = x$ für alle $t \in [0,1]$, stetig. Also $x \approx_A x$.

Symmetrisch | Sei $x \approx_A y$. Sei $f : [0,1] \to A$ eine stetige Fkt mit $f(0) = x$ und $f(1) = y$.

Definiere $h : [0,1] \to A$ durch $h(t) = f(1-t)$.
Dann $h(0) = y$, $h(1) = x$ und h ist stetig. Also $y \approx_A x$.

<u>transitiv</u> | Sei $x \approx_A y \approx_A z$. Seien



$f : [0,1] \to A$ und $g : [0,1] \to A$

stetige Funktionen mit $f(0) = x$, $f(1) = y$, $g(0) = y$, $g(1) = z$.

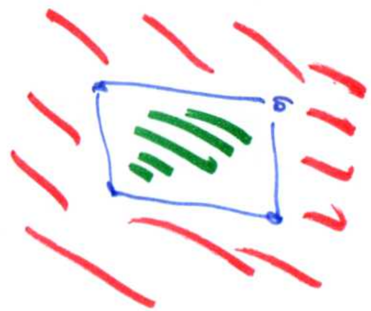
Definiere $h : [0,1] \to A$ durch

$$h(t) = \begin{cases} f(2t) & \text{wenn } t \le \frac{1}{2} \\ g(2t-1) & \text{wenn } t > \frac{1}{2}. \end{cases} \qquad 2(t - \tfrac{1}{2})$$

Dann ist h stetig (denn: da f, g stetig sind ist h in $[0, \frac{1}{2})$, $(\frac{1}{2}, 1]$ stetig. Außerdem ist $h(\frac{1}{2}) = f(1) = g(0) = y$ und mithin ist h auch bei $t = \frac{1}{2}$ stetig).

Da $h(0) = f(0) = x$ und $h(1) = g(1) = z$ zeigt dies

$x \approx_A z$. $\square$



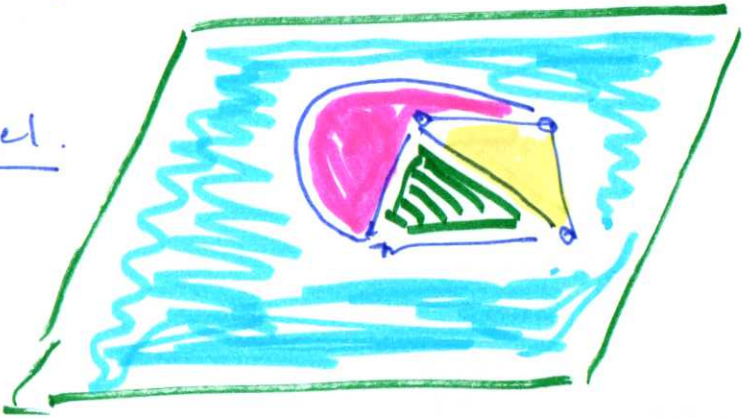
<u>Dfn 6.5.</u> Sei $A \subseteq \mathbb{R}^2$. Die Äquivalenzklassen von $\approx_A$ heißen <u>Zusammenhangskomponenten</u> von A.

<u>Dfn 6.6.</u> Sei (b, α) eine Einbettung des Graphen $G = (V, E)$. Die Zusammenhangskomponenten von

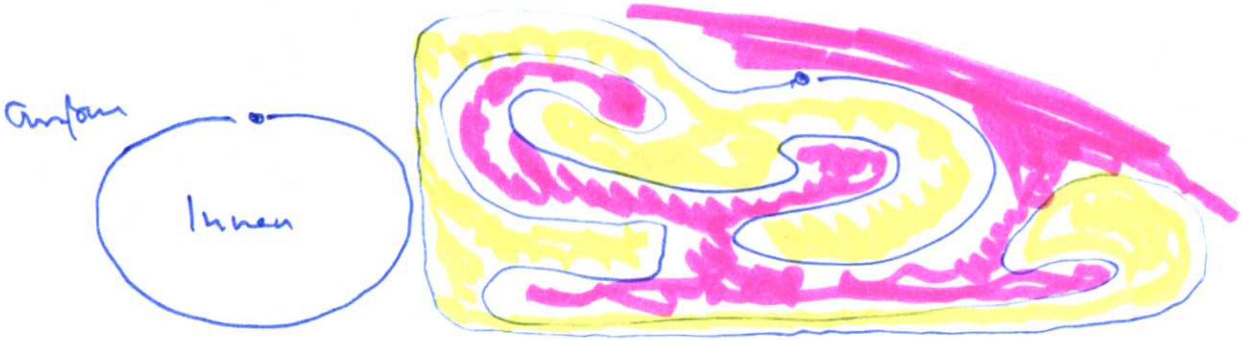
$$\mathbb{R}^2 \setminus \Big(\bigcup_{e \in E} \alpha(e) \cup b[V] \Big)$$

heißen <u>Länder</u> der Einbettung.

<u>Beispiel.</u>



Eine Einbettung des K_4 mit 4 Ländern.



Dfn 6.7. Man nennt $k \subseteq \mathbb{R}^2$ eine Jordan-Kurve, wenn's eine bis auf $f(0) = f(1)$ injektive stetige Funktion $f : [0,1] \to \mathbb{R}^2$ mit $k = \{f(t) : t \in [0,1]\}$ gibt.

Satz 6.8 (Jordan'scher Kurvensatz) Ist $k \subseteq \mathbb{R}^2$ eine Jordan-Kurve, so hat $\mathbb{R}^2 \setminus k$ genau zwei Zusammenhangskomponenten. Beide haben Rand k.

Beweis. Man hört Topologie.