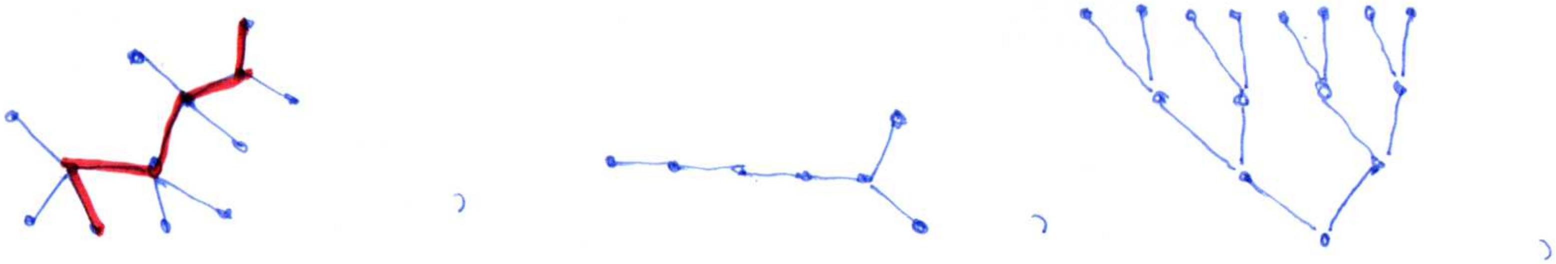
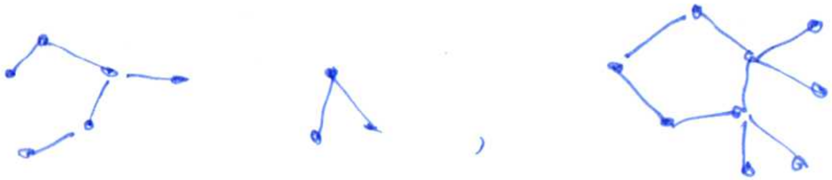
§5. Bäume.

Dfn. 5.1 Ein **Baum** ist ein zsh. Graph, der keine Kreise enthält.



sind Bäume



sind keine Bäume.

Satz 5.2. Sei $G=(V,E)$ ein Graph mit $V \neq \emptyset$. Äquivalent sind

(a) G ist ein Baum

(b) Für je zwei Ecken $x, y \in V$ gibt's genau einen Weg von x nach y.

(c) G ist maximal kreisfrei, d.h.

- G enthält keinen Kreis
- Für alle $e \in V^{(2)} \setminus E$ enthält $G+e$ einen Kreis.

(d) G ist minimal zsh, d.h.

- G ist zsh.
- Für alle $e \in E$ ist $G - e$ nicht zsh.

(e) G ist zsh. und $|V| = |E| + 1$

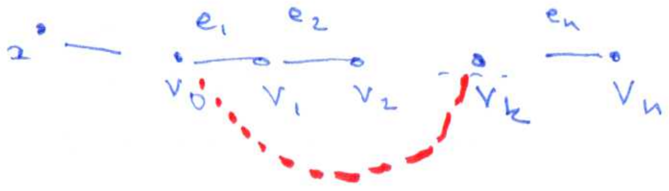
__Dfn. 5.3.__ Eine Ecke x eines Graphen G heißt __Blatt__, wenn $d(x) = 1$.

__Lemma 5.4.__ Jeder Baum mit mind. 2 Ecken hat mind. 2 Blätter.

__Beweis:__ Sei $G = (V, E)$ ein Baum mit $|V| \geq 2$.

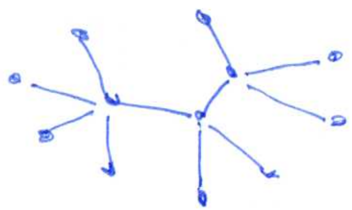
Sei
$$v_0 \, e_1 \, v_1 \dots e_n \, v_n$$
ein Weg in G mit maximaler Länge. Wegen $|V| \geq 2$ ist $E \neq \emptyset$ und daher $n \geq 1$. Also sind v_0, v_n verschieden.

v_0 ist ein Blatt, denn: Angenommen $x \neq v_1$ wäre ein Nachbar von v_0.



Wenn $x \notin \{v_2, ..., v_n\}$ könnte man x an den Weg hängen und erhielte einen Widerspruch zur Maximalität von n. Somit gibt's $k \in \{2, ..., n\}$ mit $x = v_k$. Nun ist $v_0 v_1 ... v_k$ ein Kreis in G, Wid.

Analog ist v_n ein Blatt. Also sind v_0, v_n zwei Blätter von G. $\square$



Lemma 5.5. Seien $G = (V, E)$ ein Graph und $x \in V$ ein Blatt.

Dann

$$G \text{ ist Baum } \Longleftrightarrow G - x \text{ ist Baum.}$$

Beweis. $\Rightarrow|$ Sei G ein Baum.

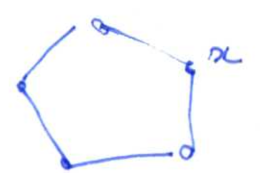
Da G kreisfrei ist, ist es $G-x$ auch.

Seien $y, z \in V(G-x) = V \setminus \{x\}$. Da G zsh. ist, gibt's in G einen Weg von y nach z. Da $d(x)=1$ liegt x nicht auf diesem Weg,

d.h. es gibt in $G-x$ einen Weg von y nach z. Also ist $G-x$ zsh.

$\Leftarrow|$ Sei $G-x$ ein Baum.

Angenommen G enthielte einen Kreis. Da $G-x$ kreisfrei ist, muss dieser Kreis durch x gehen. Aber $d(x)=1$,



Wid.

Also ist G kreisfrei. Seien $y, z \in V$ bel.

Wenn $y \neq x$, $z \neq x$ gibt's in $G-x$ einen Weg von y nach z, (da $G-x$ zsh. ist) und somit auch in G.

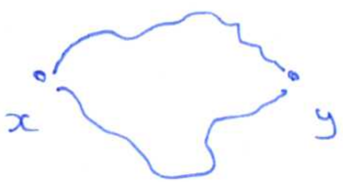
Sei nun $x \in \{y, z\}$. OBdA $y = x$. Sei u der Nachbar von x.

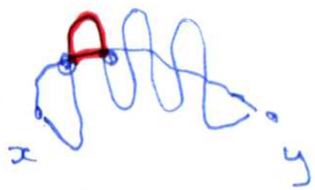
Da $u, z \in V(G-x)$ gibt's einen Weg von u nach z in $G-x$. An diesen kann man die Kante $\{x, u\}$ hängen und erhält einen Weg von x nach z.

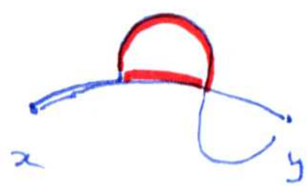
Also ist G auch zsh. $\square$

<u>Beweis des Satzes 5.2.</u>

<u>(a) $\Rightarrow$ (b)</u> | Sei G ein Baum. Betrachte bel. Ecken $x, y \in V$. Da G zsh. ist, gibt's einen Weg von x nach y.







Das Paar $\{x,y\}$ mit zwei Wegen sei so gewählt, dass der Abstand $d(x,y)$ ~~=~~ k minimal ist.

Seien $$x = v_0 e_1 v_1 e_2 v_2 \dots e_k v_k = y$$
und $$x = w_0 f_1 w_1 f_2 \dots f_m w_m = y$$

zwei Wege von x nach y. Nun ist

$$x v_1 v_2 \dots v_k w_{m-1} \dots w_1 x$$

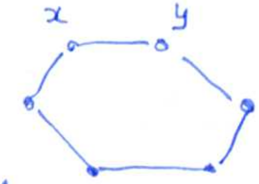
ein Kreis, denn: Sonst gäbe es $i \in [k-1]$, $j \in [m-1]$ mit $v_i = w_j$. Nun sind

$$v_i e_{i+1} v_{i+1} \dots e_k v_k = y$$
$$w_j f_{j+1} w_{j+1} \dots f_m w_m = y$$

zwei Wege zwischen v_i und y. Da $d(v_i, y) = k-i < k$ widerspricht dies der Wahl von k. ∎

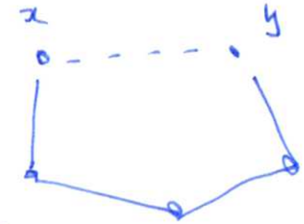
(b) $\Rightarrow$ (c) | G habe die Eigenschaft, dass zwischen je zwei Ecken genau ein Weg existiert.

Dann enthält G keinen Kreis, denn: Zwischen je zwei Ecken eines Kreises gibt's 2 verschiedene Wege.



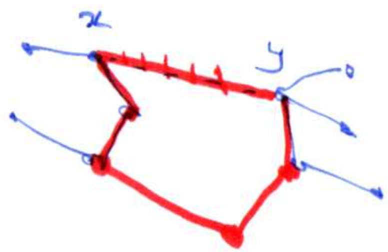
Sei nun $e = \{x, y\} \in V^{(2)} \setminus E$ beliebig.

In G gibt's einen Weg von x nach y.



Zusammen mit e ergibt dieser einen Kreis in $G + e$.

(c) $\Rightarrow$ (d) | Sei G maximal kreisfrei.



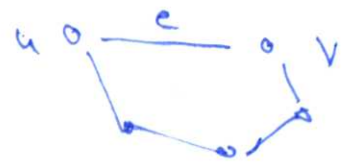
Dann ist G zsh, denn: Sonst hätte G mind. 2 Komponenten. Seien $x, y \in V$ aus verschiedenen Komponenten. Dann $e = \{x, y\} \notin E$.

Da G <u>maximal</u> kreisfrei ist, enthält $G + e$ einen Kreis.

Aber G ist kreisfrei, d.h. der Kreis in $G + e$ enthält e.

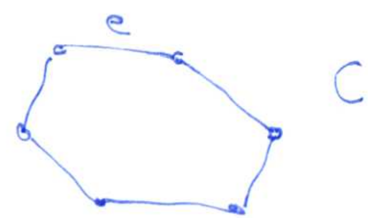
Somit gibt's in G einen Weg von x nach y. **Wid.**

G ist sogar minimal zsh., denn: Sei $e = \{u, v\} \in E$ beliebig.
In $G-e$ gibt's keinen Weg von u nach v, da dieser mit e einen Kreis in G bilden würde.



Also ist $G-e$ nicht zsh.

(d) $\Rightarrow$ (a) Sei G minimal zsh.



Insbesondere ist G zsh. Angenommen G enthielte einen Kreis C. Sei e Kante von C.
Nun ist $G-e$ nicht zsh. Also gibt's $x, y \in V$, zwischen denen es in $G-e$ keinen Spaziergang gibt.
Aber in G gibt es so einen Spaziergang. In diesem kommt zwar die Kante e vor, aber man kann sie durch den Weg $C-e$ ersetzen. **Wid.**

Satz 5.2

(e)

$$\begin{array}{ccc} (a) & \Longrightarrow & (b) \\ \Uparrow & & \Downarrow \\ (d) & \Longleftarrow & (c) \end{array}$$