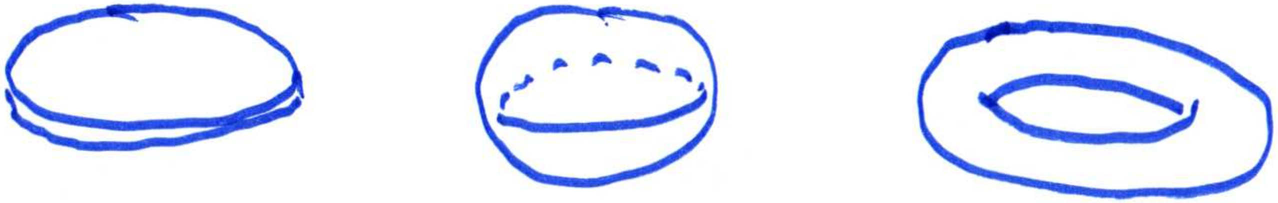
Diskrete Mathematik.

Typische Fragen und Resultate.

4 - Farbensatz. Man kann die Länder einer Karte stets so mit 4 Farben färben, dass benachbarte Länder verschiedenfarbig sind. (wenn die Länder zsh, ...)



Haus des Nikolaus

6 Leute auf Party Gibt 3, die sich paarweise kennen oder 3, die sich paarweise nicht kennen.

n Leute im Raum Wenn's mehr als $\frac{n^2}{4}$ Bekanntschaften gibt, dann gibt's 3, die sich paarweise kennen.

Literatur J. Matoušek, J. Nešetřil: Diskrete Mathematik – Eine Entdeckungsreise.

§1. Grundlagen.

Notation $\mathbb{N} = \{1, 2, 3, \ldots\}$

Für $x \in \mathbb{R}$ schreibe

$\lfloor x \rfloor$ = "x abgerundet" $= \max\{z \in \mathbb{Z} : z \leq x\}$

$\lceil x \rceil$ = "x aufgerundet" $= \min\{z \in \mathbb{Z} : x \leq z\}$

Für die Potenzmenge einer Menge X schreiben wir 2^X oder $\mathcal{P}(X)$,

also $\mathcal{P}(X) = \{Y : Y \subseteq X\}$.

Für $n \in \mathbb{N}$ setze $[n] = \{1, 2, \ldots, n\}$.

Erinnerung. Eine **Relation** ist eine Menge geordneter Paare.
Eine Relation zwischen Mengen X, Y ist eine Teilmenge $R \subseteq X \times Y$.
Eine Relation **auf** X ist eine Teilmenge $R \subseteq X^2$.
Statt $(x,y) \in R$ schreibt man oft xRy.

§2. Ordnungen.

Definition 2.1. Eine Relation R auf einer Menge X heißt
Ordnung auf X, wenn gilt:

- $\forall x \in X \quad xRx$ ("R ist reflexiv")
- $\forall x,y \in X \quad xRy \,\&\, yRx \longrightarrow x = y$ ("antisymmetrisch")
- $\forall x,y,z \in X \quad xRy \,\&\, yRz \longrightarrow xRz$ ("transitiv")

Das Paar (X, R) ist eine **geordnete Menge**. Falls zudem

- $\forall x,y \in X \quad xRy \vee yRx$

heißt R **lineare Ordnung** auf X.

<u>Bsp.</u> $(\mathbb{N}, \leq)$, $(\mathbb{Z}, \leq)$, $(\mathbb{R}, \leq)$ sind geordnete Mengen.

$(\mathbb{N}, |)$ "teilt" ebenfalls, aber nicht linear.

Für jede Menge X ist $(\mathcal{P}(X), \subseteq)$ geordnete Menge.

<u>Notation.</u> • Ordnungen werden oft mit $\leq$, $\leq^*$, $\sqsubseteq$ bezeichnet.

• Ist $\leq$ eine Ordnung, so bedeutet $x \geq y$ das gleiche wie $y \leq x$, und $x < y$ bedeutet $x \leq y$ und $x \neq y$.

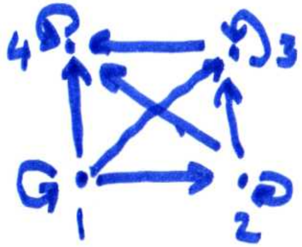
• Statt "Ordnung" sagt man oft "partielle Ordnung" oder "Halbordnung". Statt "geordnete Menge" sagen viele "partiell geordnete Menge" oder "Poset".

• Ist $(X, \leq)$ geordnete Menge und $Y \subseteq X$, dann ist $(Y, \leq \cap Y^2)$ auch eine geordnete Menge, für die man oft $(Y, \leq)$.

Wie zeichnet man (endliche) geordnete Mengen?

Man kann jede Relation R auf X malen, indem man den Elementen von X Punkte zuordnet und Paare $(x,y) \in R$ durch Pfeile $x \longrightarrow y$ darstellt.

$([4], \leq)$



Bei geordneten Mengen kann man Schlingen $\circlearrowleft$ und Pfeile, die sich durch Transitivität ergeben, weglassen.

$$1 \longrightarrow 2 \longrightarrow 3 \longrightarrow 4$$

Dfn 2.2. Sei $(X, \leq)$ geordnete Menge. Man nennt $y \in X$ **direkten Nachfolger** von $x \in X$, wenn's kein $t \in X$ mit $x < t < y$ gibt.

Beispiele. In $(\mathbb{N}, \leq)$ ist $n+1$ direkter Nachfolger von n.

In $(\mathbb{N}, |)$ sind die dir. Nachf. von 1 die Primzahlen.

In $(\mathbb{Q}, \leq)$ gibt's keine direkten Nachfolger.

Lemma 2.3. Sei $(X, \leq)$ eine endl. geordnete Menge und $\lhd$ die zu $\leq$ gehörige "direkte Nachfolger"-Relation. Für $x, y \in X$ sind äquivalent

(a) $x \leq y$

(b) Es gibt $k \in \mathbb{N}_0$ und $x_1, \ldots, x_k \in X$ mit

$$x \lhd x_1 \lhd x_2 \lhd \ldots \lhd x_k \lhd y.$$

Beweis. $\Leftarrow$ trivial.

$\Rightarrow$ Wenn $k \in \mathbb{N}_0$, $x_1, \ldots, x_k$ und $x < x_1 < \ldots < x_k < y$ dann sind $x_1, \ldots, x_k$ paarweise verschieden, also $k \leq |X|$.

Da X endlich ist, gibt's also ein größtes $k \in \mathbb{N}_0$, für das $x_1, \dots, x_k \in X$ mit $x < x_1 < \dots < x_k < y$ existieren.

Dann ist $x \lhd x_1 \lhd \dots \lhd x_k \lhd y$, denn:

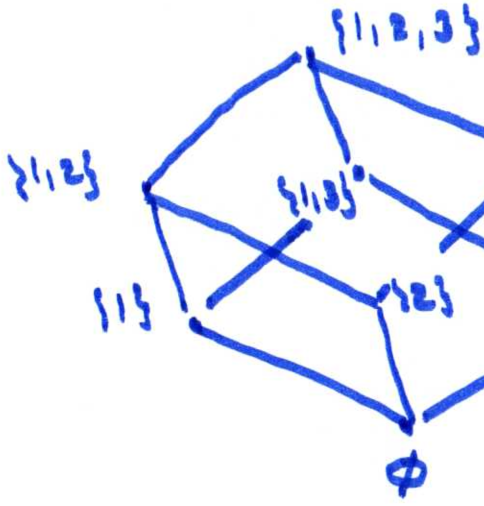
Wäre nicht $x \lhd x_1$, dann gäbe es $t \in X$ mit $x < t < x_1$ und $x < t < x_1 < \dots < x_k < y$ widerspräche der maximalen Wahl von k. Also doch $x \lhd x_1$. Analog $x_i \lhd x_{i+1}$ für $1 \leq i \leq k-1$ und $x_k \lhd y$. $\square$

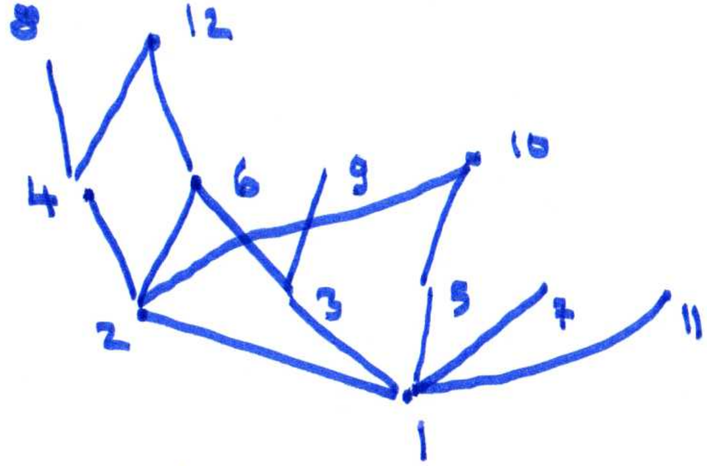
Um $(X, \leq)$ zu malen, genügt es also, die zu $\leq$ gehörige Relation "ist direkter Nachfolger" zu malen.

Wenn alle Pfeile nach oben gehen, kann man die Pfeilspitzen weglassen ("Hasse-Diagramm")

Beispiele.

$([4], \leq)$ $\qquad$ $(\mathcal{P}([3]), \subseteq)$ $\qquad$ $([12], \mid)$





Definition 2.4. Seien $(X_1, \leq_1), \dots, (X_n, \leq_n)$ lineare Ordnungen.

Die lexikographische Ordnung $\leq_{lex}$ auf $X_1 \times \dots \times X_n$ ist definiert durch

$$(a_1, \dots, a_n) <_{lex} (b_1, \dots, b_n) \iff \text{Für } j = \min\{i \in [n] : a_i \neq b_i\} \text{ ist } a_j < b_j.$$

Mit andern Worten

$$(a_1, \dots, a_n) \leq_{lex} (b_1, \dots, b_n)$$

$\Longleftrightarrow$ $a_1 < b_1$

oder $a_1 = b_1$ & $a_2 < b_2$

oder $a_1 = b_1$ & $a_2 = b_2$ & $a_3 < b_3$

$\vdots$

oder $a_1 = b_1$ & $\dots$ & $a_{n-1} = b_{n-1}$ & $a_n < b_n$

oder $a_1 = b_1$ & $\dots$ & $a_n = b_n$.

Hasse - Diagramm von $([3] \times [4], \leq_{lex})$.