Additive Kombinatorik II, Blatt 4.

Aufgabe 1.

Wenn zwei Dirichlet-Reihen $A(s) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{a_n}{n^s}$ und $B(s) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{b_n}{n^s}$

absolut konvergieren ist

$$A(s)\, B(s) = \sum_{m=1}^{\infty} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{a_m b_n}{(mn)^s} = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(a*b)_n}{n^s},$$

wobei $(a*b)_n = \sum_{d \mid n} a_d \, b_{n/d}$.

Für alle $k \geq 2$, $n \in \mathbb{N}$ ist

$$\tau_k(n) = \sum_{d \mid n} \tau_{k-1}\left(\frac{n}{d}\right) = (\mathbb{1} * \tau_{k-1})(n),$$

wobei $\mathbb{1}(n) = 1$ für alle $n \in \mathbb{N}$.

Daher $$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\tau_k(n)}{n^s} = \zeta(s) \cdot \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\tau_{k-1}(n)}{n^s},$$

wenn immer die Reihen auf der rechten Seite absolut konvergieren. Wegen $\tau_1 = \mathbb{1}$ folgt durch Induktion nach k, dass

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\tau_k(n)}{n^s} = (\zeta(s))^k .$$

Alternativ kann man ausnutzen, dass $\tau_k(n)$ multiplikativ ist. Da $\tau_k(p^\alpha) = \binom{\alpha+k-1}{k}$ folgt

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\tau_k(n)}{n^s} = \prod_p \sum_{\alpha \geq 0} \binom{\alpha+k-1}{k} \cdot \frac{1}{p^{\alpha s}}$$

$$= \prod_p \left(1 - \frac{1}{p^s}\right)^{-k} \qquad \text{(Binomialreihe)}$$

$$= (\zeta(s))^k .$$

Aufgabe 2.

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{a_n}{n^s} = \prod_p \left(1 + \frac{1}{p^s}\right) = \prod_p \frac{1-p^{-2s}}{1-p^{-s}} = \frac{\zeta(s)}{\zeta(2s)}$$

Aufgabe 3.

$$\prod_p \frac{p^2+1}{p^2-1} = \prod_p \frac{1+p^{-2}}{1-p^{-2}} = \prod_p \frac{1-p^{-4}}{(1-p^{-2})^{-2}}$$

$$= \frac{\zeta(2)^2}{\zeta(4)} = \frac{(\pi^2/6)^2}{\pi^4/90} = \frac{5}{2}$$

Aufgabe 4

Da $\tau(n)^2$ multiplikativ ist, gilt

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\tau(n)^2}{n^s} = \prod_p \sum_{\alpha \geq 0} \frac{(\alpha+1)^2}{p^{\alpha s}} .$$

Für $|z| < 1$ ist $\frac{1}{(1-z)^3} = \sum_{\alpha \geq 0} \binom{\alpha+2}{2} z^\alpha ,$

$$\frac{1}{(1-z)^2} = \sum_{\alpha \geq 0} (\alpha+1) z^\alpha$$

und daher

$$\sum_{\alpha \geq 0} (\alpha+1)^2 z^\alpha = \sum_{\alpha \geq 0} \left(2\binom{\alpha+2}{2} - (\alpha+1) \right) z^\alpha$$

$$= \frac{2}{(1-z)^3} - \frac{1}{(1-z)^2} = \frac{1+z}{(1-z)^3}$$

Folglich

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\tau(n)^2}{n^s} = \prod_p \frac{1+p^{-s}}{(1-p^{-s})^3} = \prod_p \frac{1-p^{-2s}}{(1-p^{-s})^4}$$

$$= \frac{\zeta(s)^4}{\zeta(2s)} .$$

Aufgabe 5.

Setze $\alpha = \frac{1}{14}$. Definiere $f: \mathbb{Z}/N\mathbb{Z} \longrightarrow \mathbb{N}_0$ durch

$$f(n) = |\{ p \in [t] : n \equiv ap^3 \ (\mathrm{mod.}\ N) \}|.$$

Es sei M die größte gerade Zahl mit $M \leq N t^{-\alpha}$.

Da $N t^{-\alpha} \geq t_0^{1-\alpha}$ groß ist, gilt $M \geq \frac{1}{2} N t^{-\alpha}$.

Wenn die Behauptung falsch ist, gilt $\mathrm{supp}(f) \cap [-M, M) = \phi$.

Also gibt's $r \in \mathbb{Z}$ mit $N \nmid r$,

$$\left\| \frac{r}{N} \right\| < \frac{N}{M^2} \leq \frac{4 t^{+2\alpha}}{N}$$

und

$$|\hat{f}(r)| \geq \frac{tM}{2N} \geq \frac{1}{4} t^{1-\alpha}.$$

OBdA $|r| < 4 t^{2\alpha}$ und $r \neq 0$.

Es gilt $$\hat{f}(r) = \sum_{p=1}^{t} e(-arp^3 / N) = \sum_{p=1}^{t} e(\alpha p^3)$$

Wähle $\left|\alpha - \frac{b}{q}\right| \leq \frac{1}{qt}$, wobei $q \leq t$, $b \in \mathbb{Z}$, $\operatorname{ggT}(b,q) = 1$.

Aus der Weyl'schen Ungleichung mit $\varepsilon = \frac{\alpha}{9}$ folgt

$$\left|\sum_{p=1}^{t} e(\alpha p^3)\right| \leq O\left(t^{1+\varepsilon}\left(\frac{1}{t} + \frac{1}{q} + \frac{q}{t^2}\right)^{1/4}\right)$$

$$= O(t^{1+\varepsilon} q^{-1/4}).$$

Somit

$$q^{1/4} \leq O(t^{\alpha+\varepsilon}),$$

d.h.

$$q \leq O(t^{4\alpha+4\varepsilon})$$

Ein hinreichend großes t_0 führt auf $q \leq \frac{1}{4} t^{5\alpha/2}$

Multipliziere $\left|\alpha - \frac{b}{q}\right| \leq \frac{1}{qt}$ mit $r^2 q^3$.

$$\left\|\frac{a(rq)^3}{N}\right\| \leq \left|-\frac{a(rq)^3}{N} - br^2q^2\right| \leq \frac{r^2q^2}{t} \leq \frac{t^{13\alpha}}{t} \leq t^{-\alpha}$$