Additive Kombinatorik II - Blatt 3

1. Aufgabe.

$$\int_\xi^{\xi+1} F(\alpha)^3 e(-n\alpha)\, d\alpha = \sum_{p_1, p_2, p_3 \le n} (\log p_1)(\log p_2)(\log p_3) \int_\xi^{\xi+1} e\big((p_1+p_2+p_3-n)\alpha\big)\, d\alpha$$

$$= \sum_{p_1+p_2+p_3=n} (\log p_1)(\log p_2)(\log p_3) = R(n).$$

2. Aufgabe.

- Sei $1 \le a \le q \le Q$ und $ggT(a,q) = 1$. Da

$$\frac{a}{q} - \frac{Q}{n} \ge \frac{1}{Q} - \frac{Q}{n} \ge \frac{Q}{n} \qquad (\text{wegen } 2Q^2 = 2(\log n)^{200} < n)$$

und $$\frac{a}{q} + \frac{Q}{n} \le 1 + Q/n$$

ist $$\mathfrak{M}(q,a) \subseteq \left[\frac{Q}{n}, 1 + \frac{Q}{n}\right].$$

- Sei $\mathfrak{M}(q', a')$ ein weiterer großer Bogen. Wegen $\frac{a}{q} \neq \frac{a'}{q'}$ ist

$$\left|\frac{a}{q} - \frac{a'}{q'}\right| = \frac{|aq' - a'q|}{qq'} \ge \frac{1}{Q^2} > \frac{2Q}{n} \qquad (\text{da } 2Q^3 = 2(\log n)^{300} < n)$$

und daher $\mathfrak{M}(q,a) \cap \mathfrak{M}(q',a') = \emptyset$.

3. Aufgabe.

Beh. Für alle $\alpha \in \mathfrak{m}$ ist $|F(\alpha)| \leq O\left(\frac{n}{(\log n)^{40}}\right)$.

Beweis. Sei $\alpha \in \mathfrak{m}$. Nach Lemma von Dirichlet gibt's $a \in \mathbb{Z}$ und $q < \frac{n}{Q}$

mit $\mathrm{ggT}(a,q) = 1$ und $\left|\alpha - \frac{a}{q}\right| < \frac{1}{q \cdot \frac{n}{Q}} \leq \min\left(\frac{1}{q^2}, \frac{Q}{n}\right)$.

Da $\alpha \in \left[\frac{Q}{n}, 1+\frac{Q}{n}\right]$ ist dabei $1 \leq a \leq q$. Wäre also $q \leq Q$,

so müsste $\alpha \in \mathfrak{M}(q,a) \subseteq \mathfrak{M}$ sein, Wid. Dies zeigt $Q < q$.

Mithin
$$n q^{-1/2} + n^{1/2} q^{1/2} + n^{4/5} \leq \frac{n}{Q^{1/2}} + \frac{n}{Q^{1/2}} + n^{4/5} \leq O\left(\frac{n}{(\log n)^{50}}\right).$$

Benutze nun das Lemma von Winogradow. $\square$

Es folgt
$$\left|\int_{\mathfrak{m}} F(\alpha)^3 e(-n\alpha)\, d\alpha\right| \leq \int_{\mathfrak{m}} |F(\alpha)|^3 \, d\alpha$$

$$\leq O\left(\frac{n}{(\log n)^{40}}\right) \int_0^1 |F(\alpha)|^2 \, d\alpha \leq O\left(\frac{n}{(\log n)^{40}}\right) \sum_{p \leq n} (\log p)^2$$

$$\leq O\left(\frac{n}{(\log n)^{40}} \cdot n (\log n)^2\right) = O\left(\frac{n^2}{(\log n)^{38}}\right) = o(n^2). \quad \square$$

Bemerkungen (Primzahlsatz)

Sei $\pi(x) = |\{p \le n : p \text{ prim}\}|$.

Es gilt $\pi(x) \sim \frac{x}{\log x}$ (Primzahlsatz).

Sei $li(x) = \int_2^x \frac{dt}{\log t}$

Eine genauere Form des Primzahlsatzes lautet

$$\pi(x) = li(x) + O\left(\frac{x}{e^{\sqrt{\log x}}}\right).$$

Die Riemann'sche Vermutung ist zu

$$\pi(x) = li(x) + O(\sqrt{x} \cdot \log x)$$

äquivalent.

4. Aufgabe.

Wir haben $\int_{-Q/n}^{+Q/n} v(\beta)^3 e(-n\beta)\, d\beta = \left(\frac{1}{2} + o(1)\right) n^2$

zu zeigen. Einerseits ist

$$\int_{-1/2}^{+1/2} v(\beta)^3 e(-n\beta)\, d\beta = \sum_{1 \leq m_1, m_2, m_3 \leq n} \int_{-1/2}^{+1/2} e((m_1 + m_2 + m_3 - n)\beta)\, d\beta$$

$$= \left| \{ (m_1, m_2, m_3) \in [n]^3 : n = m_1 + m_2 + m_3 \} \right|$$

$$= \binom{n-1}{2} = \left(\frac{1}{2} + o(1)\right) n^2,$$

weshalb nur

$$\int_{Q/n}^{1/2} v(\beta)^3 e(-n\beta)\, d\beta = o(n^2)$$

zu zeigen bleibt. Andererseits ist

$$|v(\beta)| = \left| \frac{e((n+1)\beta) - e(\beta)}{e(\beta) - 1} \right| \leq \frac{2}{|e(\beta) - 1|} = \frac{1}{|\sin \pi\beta|} \leq \frac{1}{2|\beta|}$$

für alle $\beta \in [-\frac{1}{2}, +\frac{1}{2}] \setminus \{0\}$.

Somit ist $|v(\beta)| \leq \frac{n}{2Q} = o(n)$ für $\beta \in [\frac{Q}{n}, \frac{1}{2}]$ und

$$\left| \int_{Q/n}^{1/2} v(\beta)^3 e(-n\beta)\, d\beta \right| \leq \int_{Q/n}^{1/2} |v(\beta)|^3\, d\beta$$

$$\leq o(n) \cdot \int_0^1 |v(\beta)|^2\, d\beta$$

$$= o(n) \cdot n = o(n^2).$$

5. Aufgabe.

Betrachte zunächst einen großen Bogen $\mathfrak{M}(q,a)$ und $\alpha \in \mathfrak{M}(q,a)$, $\beta = \alpha - \frac{a}{q}$.

Da $$|F(\alpha)^3 - w_q^3 v(\beta)^3| \leq 3|F(\alpha) - w_q v(\beta)| \max(|F(\alpha)|^2, w_q^2 |v(\beta)|^2)$$

und $$|F(\alpha)| \leq \sum_{p \leq n} \log p \leq n \log n,$$

$$|w_q v(\beta)| \leq |F(\alpha)| + O\left(\frac{N}{Q^{10}}\right) \leq 2n \log n$$

ist $$|F(\alpha)^3 - w_q v(\beta)^3| \leq 12 \cdot O\left(\frac{n}{Q^{10}}\right) \cdot (n \log n)^2 \leq \frac{n^3}{Q^9}$$

Somit

$$\int_{\mathfrak{M}(q,a)} F(\alpha)^3 e(-n\alpha)\, d\alpha = \int_{\mathfrak{M}(q,a)} w_q^3\, v\left(\alpha - \frac{a}{q}\right)^3 e(-n\alpha)\, d\alpha + O\left(\frac{Q}{n} \cdot \frac{n^3}{Q^9}\right)$$

$$= e(-an/q) \cdot w_q^3 \int_{-Q/n}^{+Q/n} v(\beta)^3 e(-n\beta)\, d\beta + O\left(\frac{n^2}{Q^8}\right)$$

Da es $\leq Q^2$ große Bögen gibt, folgt

$$\int_{\mathfrak{M}} F(\alpha)^3 e(-n\alpha)\, d\alpha = \mathfrak{S}(n, Q) \left(\tfrac{1}{2} + o(1)\right) n^2 + O\left(\frac{n^2}{Q^6}\right)$$

$$= \left(\mathfrak{S}(n, Q) + o(1)\right) \cdot n^2/2 .$$

Bemerkungen zu Primzahlen in arithmetischen Folgen.

1) Dirichlet zeigte: Wenn q, a teilerfremd sind, dann gibt's unendlich viele Primzahlen p mit $p \equiv a \pmod{q}$

2) Es gilt sogar der Primzahlsatz für arithmetische Folgen: Ist (q,a) ein festes Paar mit $\mathrm{ggT}(q,a) = 1$, so gilt

$$|\{ p \leq x : p \text{ prim und } p \equiv a \,(\mathrm{mod.}\, q) \}| = \frac{\mathrm{li}(x)}{\varphi(q)} + O\left(\frac{x}{e^{\sqrt{\log x}}} \right).$$

Hier ist $\varphi(q) = |(\mathbb{Z}/q\mathbb{Z})^{\times}|$ die Anzahl der zu q teilerfremden $a \in [q]$. Die implizite Konstante hängt (sehr) von q ab.

3) Der Satz von Siegel & Walfisz ist gleichmäßig in q: Für alle $N \in \mathbb{N}$ existiert eine reelle Zahl $C(N)$ mit

$$\pi(x; q, a) = \frac{\mathrm{li}(x)}{\varphi(q)} + O\left(\frac{x}{e^{C(N) \log x}} \right)$$

für alle x, q, a mit $q \leq (\log x)^{N}$, $\mathrm{ggT}(q,a) = 1$.

Es ist damit *nicht* bekannt, wie man $C(N)$ berechnen kann, d.h. man weiß lediglich, warum ein Widerspruch entstünde, wenn es überhaupt keine solche Zahl gäbe.

Bemerkungen zum Satz von Winogradow

1) Für jeden großen Bogen $\mathfrak{M}(q,a)$ ist

$$F\left(\frac{a}{q}\right) = \sum_{\substack{1\le r\le q \\ ggT(r,q)=1}} \Bigg(\sum_{\substack{p\le n \\ p\equiv r (\mathrm{mod}\, q)}} \log p \Bigg) e\left(\frac{ar}{q}\right)$$

$$+ \underbrace{\sum_{p\mid q} \log p \; e\left(\frac{ap}{q}\right)}_{\le \log q, \text{ klein}}$$

Die angegebene Abschätzung für $F(\alpha)$ folgt aus dem Satz von Siegel & Walfisz.

2) Dabei ist $w_q = \frac{\mu(q)}{\varphi(q)}$, wobei

$$\mu(q) = \sum_{\substack{1 \le a \le q \\ ggT(a,q)=1}} e\left(\frac{a}{q}\right).$$

Es gilt $\mu(q) = 0$, wenn q durch eine Quadratzahl (außer 1) teilbar ist und $\mu(p_1 p_2 \cdots p_r) = (-1)^r$, wenn die Primzahlen $p_1, \ldots, p_r$ paarweise verschieden sind.

3) Man kann

$$\mathfrak{S}(N, Q) = \mathfrak{S}(N) + O\left(\frac{1}{Q^{1-\varepsilon}}\right)$$ zeigen,

wobei
$$\mathfrak{S}(N) = \sum_{q=1}^{\infty} w_q^3 \sum_{\substack{1 \le a \le q \\ ggT(a,q)=1}} e(-aN/q).$$

Diese Reihe hat das auf dem Lösungsblatt angegebene Euler-Produkt.