Additive Kombinatorik II, Blatt 2

Aufgabe 1.

(a) Angenommen, es gäbe nur endlich viele solche Paare (a_i, q_i), $i = 1, \dots, n$.
Wähle $Q \in \mathbb{N}$ mit $\frac{1}{Q} < \left| \frac{a_i}{q_i} - \sqrt{D} \right|$ für $i = 1, \dots, n$.
Nach Lemma 5.1 gibt's ein Paar (a, q) mit $\left| \frac{a}{q} - \sqrt{D} \right| < \frac{1}{qQ} \leq \frac{1}{q^2}$.
Da $\left| \frac{a}{q} - \sqrt{D} \right| \leq \frac{1}{Q}$ ist $(a, q) \neq (a_i, q_i)$ für alle $i \in [n]$, Wid.

Sei nun $\left| \frac{a}{q} - \sqrt{D} \right| < \frac{1}{q^2}$. Dann $\left| \frac{a}{q} + \sqrt{D} \right| \leq \left| \frac{a}{q} - \sqrt{D} \right| + 2\sqrt{D} \leq 1 + 2\sqrt{D}$,
also $|a^2 - Dq^2| = \left| \frac{a}{q} - \sqrt{D} \right| \cdot \left| \frac{a}{q} + \sqrt{D} \right| \cdot q^2 < 2\sqrt{D} + 1$.

(b) Nach Schubfachprinzip gibt's eine ganze Zahl L mit $|L| \leq 2\sqrt{D} + 1$, für die $a^2 - Dq^2 = L$ unendlich viele Lösungen $(a, q) \in \mathbb{N}^2$ hat.
Da es nur L^2 Möglichkeiten für $(a + L\mathbb{Z}, q + L\mathbb{Z})$ gibt, folgt die Behauptung. Da D keine Quadratzahl ist, muss $L \neq 0$ sein.

(c) Da $a_1 a_2 - D q_1 q_2 \equiv a_1^2 - D q_1^2 \equiv L \equiv 0 \pmod{L}$
und $a_1 q_2 - a_2 q_1 \equiv a_1 q_1 - a_1 q_1 \equiv 0 \pmod{L}$

sind $x = \frac{a_1 a_2 - D q_1 q_2}{L}$, $y = \frac{a_1 q_2 - a_2 q_1}{L}$ ganze Zahlen.

Es gilt

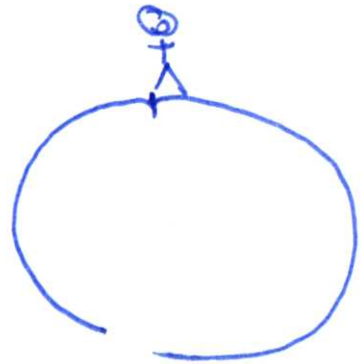
$$x^2 - Dy^2 = \frac{1}{L^2}\left[(a_1 a_2 - D q_1 q_2)^2 - D(a_1 q_2 - a_2 q_1)^2\right]$$
$$= \frac{1}{L^2}(a_1^2 - D q_1^2)(a_2^2 - D q_2^2) = 1.$$

Wäre $y = 0$, d.h. $a_1 q_2 = a_2 q_1$, dann gäbe es eine rationale Zahl η mit $a_2 = a_1 \eta$, $q_2 = q_1 \eta$. Nun

$$L\eta^2 = (a_1^2 - D q_1^2)\eta^2 = a_2^2 - D q_2^2 = L, \text{ d.h. } \eta = \pm 1.$$

Dies widerspricht der Tatsache, dass $(a_1, q_1), (a_2, q_2) \in \mathbb{N}^2$ verschieden sind.

Aufgabe 2.



OBdA sei $\varepsilon < \frac{1}{2}$, $0 \le \xi < 1$.

Beh. Es gibt $m \in \mathbb{N}$ mit $\{m\alpha\} < \varepsilon$.

Beweis. Nach Lemma 5.1 gibt's $a \in \mathbb{Z}$, $m \in \mathbb{N}$

mit $\left|\alpha - \frac{a}{m}\right| < \frac{1}{m\lceil 1/\varepsilon \rceil} \le \frac{\varepsilon}{m}$. Nun $|m\alpha - a| < \varepsilon$,

also $\{m\alpha\} \in (0, \varepsilon)$ oder $\{m\alpha\} \in (1-\varepsilon, 1)$.

Im zweiten Fall gilt $\{rm\alpha\} = r\{m\alpha\} - (r-1) = 1 - r(1 - \{m\alpha\})$

für alle $r \in \mathbb{N}$ mit $r\{m\alpha\} > (r-1)$. Für ein geeignetes r

ist also $\{rm\alpha\} < \varepsilon$. $\square$

Wähle nun $s \in \mathbb{N}$ mit $s\{m\alpha\} \le \xi < (s+1)\{m\alpha\}$.

Dann $|\xi - s\{m\alpha\}| < \{m\alpha\} < \varepsilon$, also

$$\|\xi - sm\alpha\| \le |\xi - s\{m\alpha\}| < \varepsilon.$$

Aufgabe 3.

Setze $f(\beta) = \sum_{i=1}^{n} e(a_i \beta)$. Dann

$$|f(\beta)|^2 = f(\beta) \cdot f(-\beta) = \sum_{i=1}^{n} \sum_{j=1}^{n} e((a_i - a_j)\beta)$$

$$= n + \sum_{i \neq j} e((a_i - a_j)\beta).$$

Somit $\int_0^1 |f(\beta)|^2 \, d\beta = n$.

Folglich existiert $\beta \in [0,1]$ mit $|f(\beta)|^2 \leq n$, d.h. $|f(\beta)| \leq \sqrt{n}$.

Aufgabe 4.

Setze $A = \{0, 1, \ldots, \lfloor \sqrt[k]{\tfrac{n}{2}} \rfloor \}$. Sei $\eta > 0$ beliebig.

Für $m \in \mathbb{N}_0$ setze

$$r(m) = |\{(x,y) \in A^2 : x^k + y^k\}|.$$

Dann ist $\sum_{m \geq 0} r(m) = |A|^2$ und

$$\sum_{m \geq 0} r(m)^2 = |\{(x,y,u,v) \in A^4 : x^k + y^k = u^k + v^k\}|$$

Beachte $x^k + y^k = u^k + v^k \iff x^k - u^k = y^k - v^k$.

Dies hat $|A|^2$ Lösungen mit $x = u$ (und folglich $y = v$).

Sind $(x,u) \in A^2$ mit $x \neq u$ gegeben, so gibt's wegen

$y^k - v^k = (y - v)(y^{k-1} + \ldots + v^{k-1})$ höchstens

$\tau_2(|y^k - v^k|) \leq O(|y^k - v^k|^\eta) \leq O(n^\eta)$

Möglichkeiten für (y,v). Somit

$$\sum_{m \geq 0} r(m)^2 \leq |A|^2 + |A|^2 \cdot O(n^\eta) = O(|A|^2 n^\eta).$$

Setze $D = \{ m \geq 0 : r(m) > 0 \}$.

Nun

$$|A|^4 = \Big(\sum_{m \in D} r(m) \Big)^2 \leq |D| \sum_{m \in D} r(m)^2 \leq O(|A|^2 |D| n^\eta),$$

also

$$|D| \geq \Omega(|A|^2 n^{-\eta}) = \Omega(n^{2/k - \eta}).$$

Setze nun $\eta = \varepsilon/2$. Für alle hinreichend großen n ist dann

$$|D| \geq n^{2/k - \varepsilon}.$$