Additive Kombinatorik 2 – 4. Übungsblatt
Sommer 2021
Christian Reiher

1. Setze
$$\tau_k(n) = \left|\left\{(d_1, \ldots, d_k) \in \mathbb{N}^k \colon d_1 \cdots d_k = n\right\}\right|$$
für alle $k \geqslant 2$ and $n \geqslant 1$. Man beweise, dass
$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\tau_k(n)}{n^s} = \big(\zeta(s)\big)^k$$
für alle komplexen Zahlen s mit $\mathrm{Re}(s) > 1$ und alle $k \geqslant 2$ gilt, wobei $\zeta(s) = \sum_{n=1}^{\infty} n^{-s}$.

2. Für eine natürliche Zahl n setzen wir $a_n = 0$, wenn n durch eine Quadratzahl teilbar ist, die größer als 1 ist, und $a_n = 1$ sonst. Man entwickle die für alle komplexen Zahlen s mit $\mathrm{Re}(s) > 1$ definierte Funktion
$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{a_n}{n^s}$$
in ein unendliches Produkt, dessen Faktoren von Primzahlen abhängen.

3. Man beweise die Gleichung
$$\prod_p \frac{p^2+1}{p^2-1} = \frac{5}{2}\,,$$
wobei das Produkt alle Primzahlen p durchläuft.

4. Setze $\tau(n) = \tau_2(n)$ für alle $n \in \mathbb{N}$. Man beweise, dass
$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\tau(n)^2}{n^s} = \frac{\zeta(s)^4}{\zeta(2s)}$$
für alle komplexen Zahlen s mit $\mathrm{Re}(s) > 1$ gilt.

5. Man finde eine reelle Zahl $\alpha > 0$ mit folgender Eigenschaft: Es gibt eine natürliche Zahl t_0 derart, dass für alle ganzen Zahlen $N > t \geqslant t_0$ und a eine Zahl $p \in [t]$ mit
$$\left\| \frac{ap^3}{N} \right\| \leqslant t^{-\alpha}$$
existiert.

Diskussion am Dienstag den 8. Juni