Additive Kombinatorik 2 – 3. Übungsblatt
Sommer 2021
Christian Reiher

Winogradow zeigte, dass sich jede hinreichend große ungerade Zahl n als Summe dreier Primzahlen darstellen lässt. Setze

$$R(n) = \sum_{p_1+p_2+p_3=n} \log p_1 \log p_2 \log p_3 \,,$$

wobei die Summe über alle Darstellungen von n als Summe dreier Primzahlen läuft. Es gilt sogar

$$R(n) = (\mathfrak{S}(n) + o(1))N^2/2 \,,$$

wobei

$$\mathfrak{S}(n) = \prod_p \bigl(1 + (p-1)^{-3}\bigr) \prod_{p \mid n} \frac{(p-1)(p-2)}{p^2 - 3p + 3} \,.$$

Der Beweis involviert die durch

$$F(\alpha) = \sum_{p \leqslant n} (\log p)\, e(p\alpha)$$

definierte Funktion $F\colon \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{C}$, wobei die Summation nur über Primzahlen erstreckt wird.

1. Man zeige $R(n) = \int_\xi^{\xi+1} F(\alpha)^3 e(-n\alpha)\mathrm{d}\alpha$ für jede reelle Zahl ξ.

2. Setze $Q = (\log n)^{100}$. Für jedes Paar (q, a) teilerfremder natürlicher Zahlen mit $1 \leqslant a \leqslant q \leqslant Q$ definieren wir den großen Bogen $\mathfrak{M}(q, a) = [a/q - Q/n, a/q + Q/n]$. Man zeige, dass die großen Bögen (für alle hinreichend großen n) paarweise disjunkte Teilintervalle von $[Q/n, 1 + Q/n]$ sind.

3. Es sei $\mathfrak{M}$ die Vereinigung der großen Bögen und $\mathfrak{m} = [Q/n, 1 + Q/n] \smallsetminus \mathfrak{M}$. Man beweise, dass
$$\Bigl|\int_{\alpha \in \mathfrak{m}} F(\alpha)^3 e(-n\alpha)\mathrm{d}\alpha\Bigr| = o(n^2)$$
Dabei dürfen Sie das folgende Lemma von Winogradow ohne Beweis benutzen: Wenn $|\alpha - a/q| \leqslant 1/q^2$, $q \leqslant n$ und $\mathrm{ggT}(a, q) = 1$, dann
$$|F(\alpha)| \leqslant O((nq^{-1/2} + n^{1/2}q^{1/2} + n^{4/5})(\log n)^4) \,.$$

4. Definiere $v\colon \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{C}$ durch $v(\beta) = \sum_{m=1}^n e(m\beta)$. Man zeige
$$\int_{\alpha \in \mathfrak{M}(q,a)} v(\alpha - a/q)^3 e(-n\beta)\mathrm{d}\beta = (1/2 + o(1))N^2$$
für jeden großen Bogen $\mathfrak{M}(q, a)$.

5. Man kann zeigen, dass es zu jeder natürlichen Zahl $q \leqslant Q$ eine rationale Zahl w_q mit der folgenden Eigenschaft gibt: Ist $\mathfrak{M}(q,a)$ ein großer Bogen und $\alpha \in \mathfrak{M}(q,a)$, so gilt $F(\alpha) = w_q \cdot v(\alpha - a/q) + O(N/Q^{10})$. Man folgere

$$\int_{\alpha \in \mathfrak{M}} F(\alpha)^3 e(-n\alpha) \mathrm{d}\alpha = (\mathfrak{S}(n,Q) + o(1)) N^2/2\,,$$

wobei

$$\mathfrak{S}(n,Q) = \sum_{q \leqslant Q} w_q^3 \sum_{\substack{1 \leqslant a \leqslant q \\ \mathrm{ggT}(a,q)=1}} e(-an/q)\,.$$

Diskussion am Dienstag den 18. Mai