Additive Kombinatorik 2 – 2. Übungsblatt
Sommer 2021
Christian Reiher

Aufgabe 4 benutzt ein Lemma, das wir erst in der 4. Vorlesung besprechen werden.

1. Es sei D eine natürliche Zahl, die keine Quadratzahl ist.
   (a) Man zeige, dass unendlich viele Paare $(a, q) \in \mathbb{N}^2$ mit $|a/q - \sqrt{D}| < 1/q^2$ existieren und dass $|a^2 - Dq^2| < 2\sqrt{D} + 1$ für diese Paare gilt.
   (b) Man zeige, dass zwei verschiedene Paare natürlicher Zahlen (a_1, q_1), (a_2, q_2) und eine ganze Zahl L mit $a_1^2 - Dq_1^2 = a_2^2 - Dq_2^2 = L$, $a_1 \equiv a_2 \pmod{|L|}$ und $q_1 \equiv q_2 \pmod{|L|}$ existieren.
   (c) Man zeige, dass in dieser Situation $x = (a_1a_2 - Dq_1q_2)/L$ und $y = (a_1q_2 - a_2q_1)/L$ ganze Zahlen mit $x^2 - Dy^2 = 1$ und $y \neq 0$ sind.

2. Es seien α eine irrationale (reelle) Zahl und ξ eine beliebige reelle Zahl. Man zeige, dass zu jedem $\varepsilon > 0$ ein $n \in \mathbb{N}$ mit $\|n\alpha - \xi\| < \varepsilon$ existiert.

3. Es seien $a_1 < \dots < a_n$ positive reelle Zahlen. Man beweise, dass eine reelle Zahl β mit
$$\Big|\sum_{i=1}^{n} e(a_i\beta)\Big| \leqslant \sqrt{n}$$
existiert.

4. Es seien $k \geqslant 2$ und $\varepsilon > 0$. Man beweise, dass für jede hinreichend große natürliche Zahl n mindestens $n^{2/k-\varepsilon}$ Zahlen $m \leqslant n$ existieren, für die $m = x^k + y^k$ eine Lösung mit nichtnegativen ganzen Zahlen x, y besitzt.

Diskussion am Dienstag den 4. Mai

Hinweise

3. Setze $f(\beta) = \sum_{i=1}^{n} e(a_i\beta)$ und betrachte $\int_0^1 |f(\beta)|^2 \mathrm{d}\beta$.

4. Für $m \leqslant n$ sei $r(m)$ die Anzahl der Paare (x, y) mit $0 \leqslant x, y \leqslant (n/2)^{1/k}$. Man zeige $\sum_{m \leqslant n} r(m)^2 \leqslant n^{2/k+\varepsilon/2}$ und benutze die Cauchy-Schwarz-Ungleichung.