Beachte $\hat{f}(0) = \sum_{x=0}^{N-1} f(x)$, $|\hat{f}(r)| \leq \sum_{x=0}^{N-1} |f(x)| = \hat{f}(0)$

Betrachte die Partition

$$\mathbb{Z}/N\mathbb{Z} = \{0\} \dot\cup K \dot\cup L$$

mit $K = \{r \in \mathbb{Z}/N\mathbb{Z} : r \neq 0 \text{ und } \|\frac{r}{N}\| \leq \frac{N}{M^2}\}$.

Wegen $\hat{f}(0) \cdot |\hat{J}(0)|^2 = \hat{f}(0) \cdot |J|^2 = \hat{f}(0) \cdot M^2$

und

$$\left| \sum_{r \in L} \hat{f}(r) |\hat{J}(r)|^2 \right| \leq \sum_{r \in L} |\hat{f}(r)| \cdot |\hat{J}(r)|^2$$

$$\leq 2 \sum_{r > \frac{N^2}{M^2}} \cdot \hat{f}(0) \cdot \left(\frac{N}{2r}\right)^2 \qquad \text{(Nach Lemma 9.3)}$$

$$= \frac{1}{2} \cdot N^2 \cdot \hat{f}(0) \cdot \sum_{r > N^2/M^2} \frac{1}{r^2}$$

$$< \frac{1}{2} N^2 \hat{f}(0) \sum_{r > N^2/M^2} \left(\frac{1}{r-1} - \frac{1}{r}\right)$$

$$= \frac{1}{2} N^2 \cdot \hat{f}(0) \cdot \frac{M^2}{N^2} = \frac{1}{2} M^2 \hat{f}(0)$$

ist $$\sum_{r \in K} |\hat{f}(r)| \cdot |\hat{J}(r)|^2 > \tfrac{1}{2} M^2 \hat{f}(0).$$

Folglich

$$\max\{|\hat{f}(r)| : r \in K\} \cdot \sum_{r=0}^{N-1} |\hat{J}(r)|^2 > \tfrac{1}{2} M^2 \hat{f}(0)$$

Da $$\sum_{r=0}^{N-1} |\hat{J}(r)|^2 = N \sum_{r=0}^{N-1} |J(r)|^2 \qquad \text{(Parseval)}$$

$$= MN$$

impliziert dies

$$\max\{|\hat{f}(r)| : r \in K\} > \frac{M f(0)}{2N}. \qquad \square$$

<u>Beweis von Satz 9.1.</u> Sei t_0 hinreichend groß. Der Fall $N \mid a$ ist trivial. Sei nun $N \nmid a$. Es sei $f : \mathbb{Z}/N\mathbb{Z} \longrightarrow \mathbb{N}_0$ die charakteristische Funktion der Multimenge $\{\{a, 4a, \ldots, t^2 a\}\}$, d.h. $f(n) = |\{n \in [t] : an^2 = n\}|$ für alle $n \in \mathbb{Z}/N\mathbb{Z}$.

Es sei M die größte gerade Zahl mit $M \leq \frac{N}{\sqrt[6]{t}}$. Da

$\frac{N}{\sqrt[6]{t}} \geq t^{5/6} \geq t_0^{5/6}$ hinreichend groß ist, gilt

$$M \geq \frac{N}{2\sqrt[6]{t}} .$$

Wir müssen $\operatorname{supp}(f) \cap [-M, M) \neq \emptyset$ zeigen.

Andernfalls gäbe es nach Lemma 9.3 eine ganze Zahl r

mit $N \nmid r$, $\left\| \frac{r}{N} \right\| \leq \frac{N}{M^2} \leq \frac{4t^{1/3} N}{N^2} = \frac{4t^{1/3}}{N}$

und $|\hat{f}(r)| \geq \frac{\hat{f}(0) \cdot M}{2N} = \frac{tM}{2N}$.

OBdA $|r| \leq 4t^{1/3}$, $r \neq 0$. Offenbar

$$\hat{f}(r) = \sum_{n=1}^{t} e\left(-\frac{an^2 r}{N}\right) = \sum_{n=1}^{t} e(\alpha n^2) \quad \ldots (\star)$$

wobei $\alpha = -\frac{ar}{N}$. Nach Lemma von Dirichlet gibt's

$b \in \mathbb{Z}$, $q \in \mathbb{N}$ mit $\left|\alpha - \frac{b}{q}\right| \leq \frac{1}{q \cdot t}$, $q \leq t$, $ggT(b,q) = 1$.

Aus der Weyl'schen Ungleichung mit $\varepsilon = \frac{1}{13}$ folgt

$$\left| \sum_{n=1}^{b} e(\alpha n^2) \right| \leq O\left(t^{1+\frac{1}{13}} \left(\frac{1}{t} + \frac{1}{q} + \frac{q}{t^2} \right)^{1/2} \right)$$

$$= O\left(t^{1+\frac{1}{13}} \left(\frac{3}{q} \right)^{1/2} \right).$$

Insgesamt $$\frac{tM}{2N} \leq |\hat{f}(r)| \leq O\left(t^{1+\frac{1}{13}} \left(\frac{3}{q} \right)^{1/2} \right).$$

Da $$\frac{tM}{2N} \geq \frac{t}{2N} \cdot \frac{N}{2t^{1/6}} = \frac{t^{5/6}}{4}$$

folgt $$q^{1/2} \leq O\left(t^{\frac{1}{6}+\frac{1}{13}} \right).$$

Da $t \geq t_0$ groß ist, folgt $q^{1/2} \leq \frac{1}{2} t^{\frac{1}{6}+\frac{1}{12}} = \frac{t^{1/4}}{2}$,

d.h. $q \leq \frac{1}{4} t^{1/2}$.

Multipliziert man $\left|\frac{ar}{N} + \frac{b}{q}\right| \leq \frac{1}{qt}$ mit rq^2, erhält man

$$\left\| \frac{a(rq)^2}{N} \right\| \leq \left| \frac{a(rq)^2}{N} + brq \right| \leq \frac{rq}{t}$$

Da $|rq| \leq 4t^{1/3} \cdot \frac{1}{4} t^{1/2} = t^{5/6}$ folgt dies

$$\left\| \frac{a(rq)^2}{N} \right\| \leq t^{-1/6}.$$

d.h. rq ist wie gewünscht. □

Zu (☆)

$$\hat{f}(r) = \sum_{n=0}^{N-1} f(n)\, e(-nr/N)$$

$$= \sum_{n=0}^{N-1} |\{m \in [t] : am^2 = n\}|\, e(-nr/N)$$

. . . . . .

Fakt 9.4. Für alle $a, b \in \mathbb{N}$ mit $a \geq b^2$ gibt's $r, s \in \mathbb{N}_0$ mit $a = br + (b-1)s$.

Beweis. Setze $s = b\lceil \frac{a}{b} \rceil - a$ und $r = \lceil \frac{a}{b} \rceil - s$.

Offenbar $s \geq b \cdot \frac{a}{b} - a = 0$ und wegen $s < b(\frac{a}{b}+1) - a < b$ ist $r \geq \lceil \frac{b^2}{b} \rceil - b \geq 0$. Außerdem

$$br + (b-1)s = b(r+s) - s = b\lceil \frac{a}{b} \rceil - s = a. \qquad \square$$

Für $P \subseteq \mathbb{Z}$ INF $\mathbb{Z}$ setzen wir

$$\operatorname{diam}(P) = \min\{|I| : I \subseteq \mathbb{Z} \text{ ist ein Intervall, das } P \text{ überdeckt}\}.$$

Fakt 9.5. Für jede arithm Folge $P \subseteq \mathbb{Z}$ INF $\mathbb{Z}$ mit Schrittweite d gilt $\operatorname{diam}(P) \leq N(|P|-1)\|\frac{d}{N}\| + 1$.

Beweis. Wir dürfen annehmen, dass es eine ganze Zahl k mit $k \leq \frac{d}{N} \leq k + \frac{1}{2}$ gibt, denn sonst kann man d durch $-d$ ersetzen. Sei $P = \{ a, a+d, \dots a + (|P|-1)d \}$. In $\mathbb{Z}/N\mathbb{Z}$ stimmt diese Menge mit

$$\{ a, a+(d-Nk), \dots, a+(d-Nk)(|P|-1) \}$$

überein. Also

$$\begin{aligned} \operatorname{diam}(P) &\leq (d-Nk)(|P|-1) + 1 \\ &= N \underbrace{\left(\frac{d}{N} - k \right)}_{= \left\| \frac{d}{N} \right\|} (|P|-1) + 1 . \end{aligned}$$

□

Lemma 9.6. Es sei $P \subseteq \mathbb{Z}/N\mathbb{Z}$ eine arithmetische Folge der Länge $r \geq 1$, und $s \leq r^{1/4}$ eine natürliche Zahl. Für jede lineare Fkt. $\varphi : P \longrightarrow \mathbb{Z}/N\mathbb{Z}$ gibt's eine Partition $P = P_1 \dot\cup \dots \dot\cup P_m$ von P in arithm. Folgen der Länge s oder $s-1$ mit $\operatorname{diam}(\varphi[P_i]) \leq N r^{-1/4}$ für alle $i \in [m]$.

Beweis. OBdA $P = \{1, 2, \dots, r\}$. Sei $\varphi(x) = ax + b$ für alle $x \in P$. Nach Lemma von Dirichlet gilt

$$\left| \frac{a}{N} - \frac{b}{n} \right| \leq \frac{1}{n r^{1/2}} \quad \text{für geeignete } n \leq r^{1/2},\ b \in \mathbb{Z}.$$

Nun $\left\| \frac{an}{N} \right\| \leq \left| \frac{an}{N} - b \right| \leq \frac{1}{r^{1/2}}$.

Sei $P = Q_1 \dot\cup \dots \dot\cup Q_n$ (*)

die Partition von P in Restklassen modulo n.

Für alle $i \in [n]$ ist

$$|Q_i| \geq \left\lfloor \frac{r}{n} \right\rfloor \geq \lfloor r^{1/2} \rfloor \geq s^2$$

Nach Fakt 9.4 gibt's eine Verfeinerung

$$P = P_1 \dot\cup \dots \dot\cup P_m$$

von (*) derart, dass jedes P_j Schrittweite n und Länge s oder $s-1$ hat. Für alle $j \in [m]$ hat $\varphi[P_j]$ Schrittweite an und daher

$$\begin{aligned} \operatorname{diam}(P_j) &\leq \left\| \frac{an}{N} \right\| \cdot (|P_j| - 1) \cdot N + 1 \\ &\leq N r^{-1/2} (s-1) + 1 \\ &\leq N r^{-1/2} s \leq N r^{-1/4}. \end{aligned}$$

□

Lemma 9.4. (Gowers) Es gibt $r_0 \in \mathbb{N}$ mit folgender Eigenschaft:
Für jede arithmetische Folge $P \subseteq \mathbb{Z}/N\mathbb{Z}$ der Länge $|P| = r \geq r_0$,
jedes $s \leq \frac{1}{2} r^{1/64}$ und jede quadratische Funktion
$\varphi: P \longrightarrow \mathbb{Z}/N\mathbb{Z}$ gibt's eine Partition $P = \dot{\bigcup}_{i \in [m]} P_i$
von P in arithm. Folgen der Länge s oder $s-1$
mit

$$\operatorname{diam}(\varphi[P_i]) \leq 3N r^{-1/64}$$

für alle $i \in [m]$.

Beweis. OBdA $P = \{1, \dots, r\}$. Sei $\varphi(x) = ax^2 + bx + c$.
Nach Satz 9.1 gibt's $n \leq r^{7/8}$ mit

$$\left\| \frac{an^2}{N} \right\| \leq r^{-7/48}.$$

Es sei $P = Q_1 \dot{\cup} \dots \dot{\cup} Q_n$ die Partition von P

in Restklassen modulo n. Für alle $i \in [n]$ ist

$$|Q_{a+i}| \geq \left\lfloor \frac{r}{n} \right\rfloor \geq \lfloor r^{1/8} \rfloor .$$

Setze $v = \lfloor r^{1/16} \rfloor$. Da $|Q_i| \geq v^2$ für alle $i \in [n]$ gibt's Partition

$$P = R_1 \cup \dots \cup R_k$$

von P in arithm. Folgen der Länge v oder $v-1$ mit Schrittweite n. Wir sagen, dass man jedes R_i in der gewünschten Weise partitionieren kann.

Schreibe dann

$$R_i = \{ h_i, h_i + n, \dots, h_i + (v_i - 1)n \},$$

wobei $v_i \in \{v, v-1\}$.