Beweis. Setze $\varepsilon = \frac{1}{2^k \cdot s}$. Für $a \in [q]$, $\operatorname{ggT}(a,q)$ liefert die Weyl'sche Ungleichung

$$|S(q,a)| \le O\left(q^{1+\varepsilon}\left(\frac{1}{q}+\frac{1}{q}+\frac{q}{q^k}\right)^{1/2^{k-1}}\right)$$

$$= O\left(q^{1+\varepsilon-2^{1-k}}\right).$$

Folglich ist

$$\left|\frac{S(q,a)}{q}\right|^s \le O\left(q^{s(\varepsilon-2^{1-k})}\right).$$

Summation über a liefert

$$|S_N(q)| \le \sum_{a=1}^{q}{}^{*} O\left(q^{s(\varepsilon-2^{1-k})}\right) = O\left(q^{1+s(\varepsilon-2^{1-k})}\right).$$

Da

$$1+s(\varepsilon-2^{1-k}) \le 1+s\cdot\varepsilon-(2^k+1)\cdot 2^{1-k}$$

$$= 1+s\varepsilon-2-2^{1-k}$$

$$\le -1+\frac{1}{2^k}-\frac{1}{2^{k-1}} = -1-\frac{1}{2^k}$$

zeigt dies

$$|S_N(q)| \le O\left(\frac{1}{q^{1+2^{-k}}}\right).$$

<u>Folgerung 8.2.</u> Die singuläre Reihe $\mathfrak{S}(N) = \sum_{q=1}^{\infty} S_N(q)$ konvergiert absolut und für alle $Q \in \mathbb{N}$ ist

$$\left|\mathfrak{S}(N) - \sum_{q=1}^{Q} S_N(q)\right| \le O\left(Q^{-2^{-k}}\right)$$

<u>Beweis.</u> Da $\sum_{q=1}^{\infty} \frac{1}{q^{1+\delta}}$ für $\delta > 0$ konvergiert, konvergiert $\mathfrak{S}(N)$ absolut. Außerdem

$$\left|\mathfrak{S}(N) - \sum_{q=1}^{Q} S_N(q)\right| \le \sum_{q=Q+1}^{\infty} |S_N(q)|$$

$$\le O\left(\sum_{q=Q+1}^{\infty} \frac{1}{q^{1+2^{-k}}}\right) \le O\left(\int_{Q}^{\infty} \frac{dt}{t^{1+2^{-k}}}\right).$$

Da $\int_Q^\infty \frac{dt}{t^{1+2^{-k}}} = \left[-2^{+k}\, t^{-2^{-k}}\right]_Q^\infty = Q^{2^{-k}} \cdot 2^{+k}$

folgt die Behauptung.

<u>Folgerung 8.3.</u> $R_s(N) = \left[A_s\, \mathfrak{S}(N) + o(1)\right] N^{\frac{s}{k}-1}$.

<u>Beweis.</u> Benutze Satz 7.6 und $Q \longrightarrow \infty$ für $N \longrightarrow \infty$. $\square$

. . . . . .

<u>Lemma 8.4.</u> Seien q, q', a, a' ganze Zahlen. Wenn

$ggT(q, q') = 1$

dann
$$S(q,a) \cdot S(q',a') = S(qq', aq'+a'q).$$

<u>Beweis.</u> Die Zahlen $r'q + rq'$ mit $r \in [q]$, $r' \in [q']$ durchlaufen alle Restklassen modulo qq', denn:

Es sind qq' Zahlen. Je zwei von ihnen sind inkongruent modulo qq', denn für $r_1, r_2 \in [q]$, $r_1', r_2' \in [q']$ mit

$$r_1' q + r_1 q' \equiv r_2' q + r_2 q' \pmod{qq'}$$

ist $r_1' q \equiv r_2' q \pmod{q'}$ und $r_1 q' \equiv r_2 q' \pmod{q}$

und da q, q' teilerfremd sind folgt $r_1' \equiv r_2' \pmod{q'}$

und $r_1 \equiv r_2 \pmod{q}$, also $r_1' = r_2'$, $r_1 = r_2$.

Also

$$S(qq', aq' + a'q) = \sum_{r=1}^{q} \sum_{r'=1}^{q'} e\left(\frac{(qr' + q'r)^k \cdot (aq' + a'q)}{qq'} \right)$$

Dabei $(qr' + q'r)^k \equiv (q'r)^k \pmod{q}$, also

$$(qr' + q'r)^k \cdot aq' \equiv aq'(q'r)^k \pmod{qq'}$$

und analog $(qr' + q'r)^k \cdot a'q \equiv a'q \cdot (qr') \pmod{qq'}$

Dies zeigt

$$S(qq', aq'+a'q) = \sum_{r=1}^{q} \sum_{r'=1}^{q'} e\left(\frac{a}{q} \cdot (q'r)^k + \frac{a'}{q'} (qr')^k \right)$$

$$= \sum_{r=1}^{q} e\left(\frac{a}{q} \cdot (q'r)^k \right) \cdot \sum_{r'=1}^{q'} \left(\frac{a'}{q'} (qr')^k \right).$$

Da $q'r$ alle Restklassen modulo q durchläuft, ist der erste Faktor $S(q,a)$. Analog ist der zweite Faktor $S(q',a')$. $\square$

<u>Lemma 8.5.</u> Wenn $q, q' \in \mathbb{N}$ teilerfremd sind, dann

$$S_N(qq') = S_N(q) \cdot S_N(q').$$

<u>Beweis.</u> Für die Mengen

$$R = \{ a \in [q] : \operatorname{ggT}(a,q) = 1 \},$$

$$R' = \{ a' \in [q'] : \operatorname{ggT}(a',q') = 1 \}$$

gilt

$$S_N(q)\cdot S_N(q') = \sum_{a\in R}\left(\frac{S(q,a)}{q}\right)^s e(-aN/q)\cdot\sum_{a'\in R'}\left(\frac{S(q',a')}{q'}\right)^s e\left(-\frac{a'N}{q'}\right)$$

$$= \sum_{a\in R}\sum_{a'\in R'}\left(\frac{S(qq',\, aq'+a'q)}{qq'}\right)^s e\left(-\frac{aq'+a'q}{qq'}\cdot N\right)$$

Es genügt also zu zeigen, dass $aq'+a'q$ die zu qq' teilerfremden Restklassen durchläuft.

- Für alle $a\in R$, $a'\in R'$ ist $\operatorname{ggT}(aq'+a'q,\, qq')=1$, denn: Sonst gäbe es eine Primzahl p mit $p \mid aq'+a'q$, $p \mid qq'$. OBdA $p\mid q$. Nun $p \mid aq'$, aber $p\nmid a$, $p \nmid q'$ (da a, q' zu q teilerfremd sind), Wid.

- Die Zahlen $aq'+a'q$ mit $a\in R$, $a'\in R'$ sind paarweise inkongruent modulo qq', denn: Wir wissen bereits, dass dies sogar für $[q]$, $[q']$ statt R, R' stimmt.

- Für alle $r \in \mathbb{Z}$ mit $ggT(qq', r) = 1$ gibt's $a \in R$, $a' \in R'$ mit $r \equiv a'q + aq' \pmod{qq'}$, denn: Wir wissen bereits, dass es $a \in [q]$, $a' \in [q']$ mit $r \equiv a'q + aq' \pmod{qq'}$ gibt. Jeder gem. Teiler von a, q teilt auch r. Da $ggT(r, q) = 1$ folgt $a \in R$. Analog $a' \in R'$. $\square$

Da
$$S(1,1) = \sum_{r=1}^{1} e(1 \cdot r^k \mid 1) = 1$$
ist
$$S_N(1) = \sum_{a=1}^{1}{}^{*} \left(\frac{S(1,a)}{1}\right)^s e(-aN \mid 1) = 1.$$

Idee: Aus der Eindeutigkeit der Primfaktorzerlegung sollte

$$\sum_{q=1}^{\infty} S_N(q) = \prod_{p \text{ prim}} \left[S_N(1) + S_N(p) + S_N(p^2) + \dots \right]$$

Lemma 8.6. Es sei $f: \mathbb{N} \to \mathbb{C}$ eine Funktion mit

- $f(1) = 1$
- $f(qq') = f(q) \cdot f(q')$ für alle $q, q' \in \mathbb{N}$ mit $\mathrm{ggT}(q, q') = 1$

Wenn $S = \sum_{q=1}^{\infty} f(q)$ absolut konvergiert, dann ist

$$S = \prod_p \left(1 + f(p) + f(p^2) + f(p^3) + \dots \right).$$

Bem 8.7. (1) Da $\sum_{q=1}^{\infty} |f(q)|$ konvergiert, konvergiert für jede Primzahl p die Reihe $\sum_{n=0}^{\infty} f(p^n)$ absolut

(2) Das unendliche Produkt läuft über alle Primzahlen p.

Definitionsgemäß $\prod_p \dots = \lim_{x \to \infty} \prod_{p \le x} \dots$

<u>Beispiel.</u> Für jede reelle Zahl $\sigma > 1$ ist $f(n) = \frac{1}{n^\sigma}$ multiplikativ

und

$$\zeta(\sigma) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^\sigma}$$

konvergiert absolut. Nach Lemma 8.6 ist also

$$\zeta(\sigma) = \prod_p \left(1 + \frac{1}{p^\sigma} + \frac{1}{p^{2\sigma}} + \frac{1}{p^{3\sigma}} + \dots\right) = \prod_p \left(1 - \frac{1}{p^\sigma}\right)^{-1}.$$

Gäbe es nur endlich viele Primzahlen, erhielte man für $\sigma \to 1$

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n} = \prod_p \left(1 - \frac{1}{p}\right)^{-1},$$

<u>Wid.</u> (da die harmonische Reihe divergiert)

Für komplexe Zahlen s mit $\mathrm{Re}(s) = \sigma > 1$ ist $\left|\frac{1}{n^s}\right| = \frac{1}{n^\sigma}$

und daher konvergiert

$$\zeta(s) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^s}$$

absolut und es gilt $\zeta(s) = \prod_p \left(1 - \frac{1}{p^s}\right)^{-1}$.

Die ζ-Funktion hat eine meromorphe Fortsetzung auf $\mathbb{C}$.

Ihr einziger Pol ist bei $s=1$. Der Primzahlsatz

$$|\{p \leq x : p \text{ prim}\}| \sim \int_2^x \frac{dt}{\log t}$$

ist dazu äquivalent, dass ζ keine Nullstelle s mit $\mathrm{Re}(s) = 1$ hat.

Beweis von Lemma 8.6. Setze $T(p) = \sum_{n=0}^{\infty} f(p^n)$ für jede Primzahl p. Seien $p_1 < p_2 < p_3 < \ldots$ alle Primzahlen. Sei $\varepsilon > 0$ beliebig. Da S absolut konvergiert gibt's $M \in \mathbb{N}$ mit

$$\sum_{q=M+1}^{\infty} |f(q)| < \varepsilon .$$

Wir zeigen $\left| S - \prod_{\nu=1}^{n} T(p_\nu) \right| < \varepsilon$ für $n \geq M$.

Das Produkt

$$\prod_{\nu=1}^{n} T(p_\nu) = \prod_{\nu=1}^{n} \left(1 + f(p_\nu) + f(p_\nu^2) + \dots \right)$$

endlich vieler absolut konvergenter Reihen kann man ausmultiplizieren und die Summanden beliebig anordnen.

Dadurch erhält man

$$\prod_{\nu=1}^{n} T(p_\nu) = \sum_{q=1}^{\infty}{}' f(q),$$

wobei nur über die $q \in \mathbb{N}$ summiert wird, in deren Primfaktorzerlegungen nur die Primzahlen $p_1, p_2, \dots, p_n$ vorkommen.

In dieser Summe kommen $f(1), f(2), \ldots, f(n)$ vor.

also

$$\left| S - \prod_{\nu=1}^{n} T(p_\nu) \right| \leq \sum_{\substack{q \text{ hat Primfaktor,} \\ \text{der größer als } p_n \text{ ist}}} |f(q)| \leq \sum_{q=n+1}^{\infty} |f(q)| < \varepsilon,$$

da $n \geq M$. $\square$