6. Vorlesung – Wiederholung

Seien $k \geq 2$, $s \geq 2^k + 1$, N hinreichend groß, $n = \lfloor \sqrt[k]{N} \rfloor$.

Setze
$$F(\alpha) = \sum_{m=1}^{n} e(\alpha m^k) \quad \text{für } \alpha \in \mathbb{R}.$$

Ferner seien $\nu < \frac{1}{5}$ fest und $Q = \lfloor n^\nu \rfloor$.

Das Integral
$$R_s(N) = \int_{Q/n^k}^{1+Q/n^k} F(\alpha)^s \, e(-N\alpha)\, d\alpha$$

zählt die s-Tupel $(x_1, \ldots, x_s) \in \mathbb{N}^s$ mit $N = x_1^k + \ldots + x_s^k$.

Für Paare (q,a) mit $1 \leq a \leq q \leq Q$, $\mathrm{ggT}(a,q) = 1$ setze
$$\mathfrak{M}(q,a) = \left[\frac{a}{q} - \frac{Q}{n^k}, \frac{a}{q} + \frac{Q}{n^k} \right] \quad \text{(große Bögen)}.$$

<u>Fakt 7.2.</u> Die großen Bögen sind paarweise disjunkte Teilintervalle von $\left[\frac{Q}{n^k}, 1 + \frac{Q}{n^k}\right]$.

Sei $\quad \mathfrak{M} = \dot{\bigcup}_{1 \le q \le Q} \; \dot{\bigcup}_{\substack{1 \le a \le q \\ ggT(a,q)=1}} \mathfrak{M}(q,a)$

und

$$\mathfrak{m} = \left[\frac{Q}{n^k}, 1 + \frac{Q}{n^k} \right] \setminus \mathfrak{M} \qquad (\text{"kleine Bögen"})$$

Nun wissen wir

$$R_s(N) = \int_{\mathfrak{M}} F(\alpha)^s e(-N\alpha)\, d\alpha + \int_{\mathfrak{m}} F(\alpha)^s e(-N\alpha)\, d\alpha .$$

<u>Lemma 7.3.</u> $\quad \left| \int_{\mathfrak{m}} F(\alpha)^s e(-N\alpha)\, d\alpha \right| = o(N^{\frac{s}{k}-1})$

<u>Beweis.</u> Wir zeigen $\|F\|_{\mathfrak{m}} = o(n)$. Sei $\alpha \in \mathfrak{m}$. Nach Lemma 5.1 gibt's $q \le \frac{n^k}{Q}$ und $a \in \mathbb{Z}$ mit $ggT(a,q) = 1$ und

$$\left| \alpha - \frac{a}{q} \right| \le \frac{1}{q \cdot \frac{n^k}{Q}} \le \min\left(\frac{1}{q^2}, \frac{Q}{n^k} \right).$$

Insbesondere

$$\alpha \in \left[\frac{a}{q} - \frac{Q}{n^k}, \frac{a}{q} + \frac{Q}{n^k}\right].$$

Da auch $\alpha \in \left[\frac{Q}{n^k}, 1 + \frac{Q}{n^k}\right]$ folgt $1 \leq a \leq q$.

Wäre also $q \leq Q$, dann $\alpha \in \mathfrak{M}(q,a) \subseteq \mathfrak{M}$, Wid.

Somit $Q < q \leq \frac{n^k}{Q}$. Aus Satz 5.8 folgt nun

$$|F(\alpha)| \leq O\left(n^{1+\varepsilon}\left(\frac{1}{n} + \frac{1}{q} + \frac{q}{n^k}\right)^{1/2^{k-1}}\right)$$

$$= O(n^{1+\varepsilon}) \cdot O\left(\frac{1}{n} + \frac{1}{Q} + \frac{1}{Q}\right)^{1/2^{k-1}}$$

$$= O(n^{1+\varepsilon - \nu/2^{k-1}}).$$

Hier kann man $\varepsilon = \frac{\nu}{2^k}$ wählen und erhält

$$|F(\alpha)| \leq O(n^{1-\nu/2^k}) \text{ für alle } \alpha \in \mathfrak{m}.$$

Somit

$$\left| \int_{m} F(\alpha)^s e(-N\alpha)\, d\alpha \right| \leq \int_{m} |F(\alpha)|^s \, d\alpha$$

$$\leq O\left(n^{(1-\nu/2^k)(s-2^k)} \right) \cdot \int_{m} |F(\alpha)|^{2^k} \, d\alpha$$

Satz 6.3 (Hua)

$$\leq O\left(n^{(1-\nu/2^k)(s-2^k)} \right) \cdot O\left(n^{2^k - k + \varepsilon} \right)$$

für alle $\varepsilon > 0$. Nun

$$\left(1 - \frac{\nu}{2^k}\right)(s - 2^k) + 2^k - k + \varepsilon$$

$$= (s - k + \varepsilon) - \frac{\nu}{2^k} \underbrace{(s - 2^k)}_{\geq 1}$$

$$\leq (s - k + \varepsilon) - \frac{\nu}{2^k}$$

$$= s - k - \frac{\nu}{2^{k+1}} \qquad \text{für } \varepsilon = \frac{\nu}{2^{k+1}}.$$

Also $\left| \int_{m} F(\alpha)^s e(-N\alpha)\, d\alpha \right| \leq o(n^{s-k}) = o\left(N^{\frac{s}{k}-1}\right)$. $\square$

Setze $S(q,a) = \sum_{r=1}^{q} e(ar^k/q)$ für alle $a, q \in \mathbb{N}$.

Man erwartet

$$F\left(\frac{a}{q}\right) \approx \frac{S(q,a)}{q} \cdot n \quad \text{für kleine } q.$$

Erinnerung: Über die Funktion

$$v(\beta) = \sum_{m=1}^{N} \frac{1}{k} m^{\frac{1}{k}-1} e(m\beta)$$

wissen wir

$$|v(\beta)| \leq \min\left(\sqrt[k]{N},\ 2|\beta|^{-1/k}\right) \quad \text{für } |\beta| \leq \frac{1}{2}$$

(Lemma 3.4)

und

$$\int_{-1/2}^{+1/2} v(\beta)^s e(-N\beta)\, d\beta = J_s(N) = (A_s + o(1))\, N^{\frac{s}{k}-1}$$

(Satz 3.3).

Satz 7.4. Es sei $\mathfrak{M}(q,a)$ ein großer Bogen.

Für alle $\alpha \in \mathfrak{M}(q,a)$ ist

$$F(\alpha) = \frac{S(q,a)}{q}\, v\left(\alpha - \frac{a}{q}\right) + O(Q^2).$$

Beweis. Für $\beta = \alpha - \frac{a}{q}$ ist

$$F(\alpha) - \frac{S(q,a)}{q}\, v(\beta) = \sum_{m=1}^{n} e(am^k/q)\, e(m^k\beta) - \frac{S(q,a)}{q} \sum_{m=1}^{N} \frac{1}{k} m^{\frac{1}{k}-1}\, e(m\beta)$$

$$= \sum_{m=1}^{N} u_m\, e(m\beta)$$

wobei

$$u_m = \begin{cases} e(am/q) - \frac{S(q,a)}{q} \cdot \frac{1}{k} \cdot m^{\frac{1}{k}-1} & \text{wenn } m \text{ eine } k^{te} \text{ Potenz ist} \\ - \frac{S(q,a)}{q} \cdot \frac{1}{k} \cdot m^{\frac{1}{k}-1} & \text{sonst.} \end{cases}$$

Setze $\quad u_m = \sum_{t=1}^{m} u_t \quad$ für $\quad m \in [0, N]$.

Da $\quad \sum_{m=1}^{y} e(am^k / q) = \sum_{r=1}^{q} e(ar^k / q) \, \big| [y] \cap (q\mathbb{Z} + r) \big|$

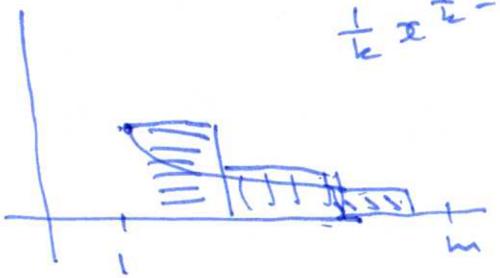
$$= \sum_{r=1}^{q} e(ar^k / q) \left(\frac{y}{q} + O(1) \right)$$

$$= \frac{S(a,q)}{q} \cdot y + O(q),$$

für alle $y \geq 1$ gilt ist

$$u_m = \sum_{t=1}^{\lfloor \sqrt[k]{m} \rfloor} e(at^k / q) - \frac{S(q,a)}{q} \cdot \sum_{t=1}^{m} \frac{1}{k} t^{\frac{1}{k} - 1}$$

$$= \frac{S(a,q)}{q} \left(\cancel{\sqrt[k]{m}} + O(1) \right) + O(q) - \frac{S(q,a)}{q} \left(\cancel{\sqrt[k]{m}} + O(1) \right)$$



$\frac{1}{k} x^{\frac{1}{k} - 1}$

$$\left| \sum_{t=1}^{m} \frac{1}{k} t^{\frac{1}{k} - 1} - \int_0^m \frac{1}{k} x^{\frac{1}{k} - 1} \, dx \right|$$

$$\int_1^m \frac{1}{k} x^{\frac{1}{k} - 1} \, dx \leq \sum_{t=1}^{m} \frac{1}{k} t^{\frac{1}{k} - 1} \leq \int_0^m \frac{1}{k} x^{\frac{1}{k} - 1} \, dx$$

$$\sqrt[k]{m} - 1 \leq \sum \leq \sqrt[k]{m}$$

also

$$U_m = \frac{S(q,a)}{q} \cdot O(1) + O(q) = O(q)$$

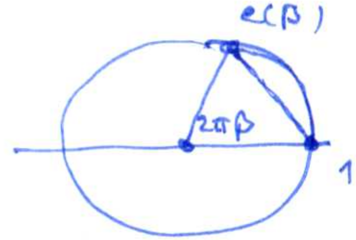
für alle m.

Folglich

$$\left| \sum_{m=1}^{N} u_m e(m\beta) \right| = \left| \sum_{m=1}^{N} (U_m - U_{m-1}) e(m\beta) \right|$$

$$= \left| U_N e(N\beta) + \sum_{m=1}^{N-1} U_m (e(m\beta) - e((m+1)\beta)) - U_0 \right|$$

$$\leq |U_N| + \sum_{m=1}^{N-1} |U_m| \cdot |1 - e(\beta)|$$



$$\leq O(q) + N \cdot O(q) \cdot 2\pi\beta$$

$$= O(Q) + O(NQ\beta) \qquad |\beta| \leq \frac{Q}{n^k}$$

$$= O(Q^2).$$

Folgerung 7.5. Für jeden großen Bogen $\mathfrak{M}(q,a)$ gilt

$$\int_{\mathfrak{M}(q,a)} F(\alpha)^s e(-N\alpha)\, d\alpha = \left(\frac{S(q,a)}{q}\right)^s e(-aN/q) \cdot$$

$$\int_{-Q/n^k}^{+Q/n^k} v(\beta)^s e(-N\beta)\, d\beta + O(Q^3 N^{\frac{s-1}{k}-1})]$$

Beweis. Sei $\alpha \in \mathfrak{M}(q,a)$ und $\beta = \alpha - \frac{a}{q}$. Indem man in die Formel

$$|x^s - y^s| = |x-y|\,|x^{s-1} + x^{s-2}y + \dots + y^{s-1}|$$

$$\leq s|x-y| \max(|x|^{s-1}, |y|^{s-1})$$

$x = F(\alpha)$ und $y = \frac{S(q,a)}{q} v(\beta)$ einsetzt, erhält man

$$\left|F(\alpha)^s - \left(\frac{S(q,a)}{q} v(\beta)\right)^s\right| \leq s \cdot O(Q^2) \cdot \max\left(|F(\alpha)|^{s-1}, \left|\frac{S(q,a)}{q} v(\beta)\right|^{s-1}\right)$$

Dabei $|F(\alpha)| \le n$ und $|v(\beta)| \le N^{1/k}$, also

$$\left| F(\alpha)^s - \left(\frac{S(q,a)}{q} \, v(\beta) \right)^s \right| \le O(Q^2) \cdot N^{\frac{s-1}{k}} .$$

Folglich

$$\left| \int_{\mathfrak{M}(q,a)} F(\alpha)^s e(-N\alpha)\, d\alpha - \int_{\mathfrak{M}(q,a)} \left(\frac{S(q,a)}{q} \, v(\beta) \right)^s e(-N\alpha)\, d\alpha \right|$$

$$\le O(Q^2) \cdot N^{\frac{s-1}{k}} \cdot \frac{2Q}{n^k}$$

$$= O(Q^3) \cdot N^{\frac{s-1}{k} - 1} . \qquad \square$$

Setze nun

$$S_N(q) = \sum_{\substack{a=1 \\ \mathrm{ggT}(a,q)}}^{q} \left(\frac{S(q,a)}{q} \right)^s \cdot e(-aN/q)$$

für alle $q \in \mathbb{N}$ und

$$\mathfrak{S}(N,Q) = \sum_{q=1}^{Q} S_N(q) .$$

Indem man Folgerung 7.5 über alle großen Bögen summiert, erhält man

$$\int_{\mathfrak{M}} F(\alpha)^s e(-N\alpha)\,d\alpha = \mathfrak{S}(N,Q)\cdot \int_{-Q/n^k}^{Q/n^k} \nu(\beta)^s e(-N\beta)\,d\beta$$

$$+ O\left(Q^5 N^{\frac{s-1}{k}-1}\right).$$

Dabei $Q = \lfloor n^{\nu} \rfloor$ mit einem konstanten $\nu < \frac{1}{5}$, also

$$O\left(Q^5 N^{\frac{s-1}{k}-1}\right) = o\left(n\, N^{\frac{s-1}{k}-1}\right) = o\left(N^{\frac{s}{k}-1}\right).$$

Da $\frac{Q}{n^k}\cdot N \longrightarrow \infty$ für $N \longrightarrow \infty$ ist dabei

$$\int_{-Q/n^k}^{+Q/n^k} \nu(\beta)^s e(-N\beta)\,d\beta = J_s(N) + o\left(N^{\frac{s}{k}-1}\right)$$

$$= \left(A_s + o(1)\right)\cdot N^{\frac{s}{k}-1}.$$

also

$$\int_{\mathfrak{M}} F(\alpha)^s e(-N\alpha)\, d\alpha = \left[\mathfrak{S}(N,Q)\cdot(A_s + o(1)) + o(1)\right] N^{\frac{s}{k}-1}.$$

Zusammen mit Lemma 7.3 ergibt sich

Satz 7.6. $R_s(N) = \left[\mathfrak{S}(N,Q)(A_s + o(1)) + o(1)\right] N^{\frac{s}{k}-1}$. $\square$

Wenn wir also $\mathfrak{S}(N,Q) \neq o(1)$ zeigen können, löst dies das Waring'sche Problem.

§ 8. Die singuläre Reihe.

Erinnerung. Seien $k \geq 2$, $s \geq 2^k + 1$ fest. Für $a, q \in \mathbb{N}$ setze

$$S(q,a) = \sum_{r=1}^{q} e(ar^k / q).$$

Für $q, N \in \mathbb{N}$ setze

$$S_N(q) = \sum_{a=1}^{q}{}^{*} \left(\frac{S(q,a)}{q} \right)^s e(-aN/q),$$

wobei $*$ bedeutet, dass nur über die a mit $\operatorname{ggT}(a,q) = 1$ summiert. Wir untersuchen die unendliche Reihe

$$\mathfrak{S}(N) = \sum_{q=1}^{\infty} S_N(q).$$

Lemma 8.1. Für alle $q \in \mathbb{N}$ ist $|S_N(q)| \leq O\left(\frac{1}{q^{1+2^{-k}}}\right)$.