5. Vorlesung.

Wiederholung

Ziel. Seien $k \geq 2$ und $s \geq 2^k + 1$. Dann

$$R_s(n) = \left[A_s \, \mathfrak{S}(n) + o(1) \right] n^{\frac{s}{k} - 1},$$

wobei

- $R_s(n) = \left| \{ (x_1, \dots, x_s) \in \mathbb{N}^s : x_1^k + \dots + x_s^k = n \} \right|$,
- $A_s > 0$ Konstante (aus § 3)
- $\mathfrak{S}(n) = \prod_{p \text{ prim}} T_p(n)$ ("lokale Korrekturfaktoren")
- $\mathfrak{S}(n) = \Omega(1)$.

Satz (Weyl) Sei $\varepsilon > 0$. Seien $|\alpha - \frac{a}{q}| \leq \frac{1}{q^2}$, $ggT(a, q) = 1$, $n \in \mathbb{N}$ und $S = \sum_{m=1}^{n} e(\alpha m^k)$. Dann

$$|S| = O\left(n^{1+\varepsilon} \left(\frac{1}{n} + \frac{1}{q} + \frac{q}{n^k} \right)^{1/2^{k-1}} \right).$$

§6. Das Lemma von Hua.

Der Beweis von Satz 5.4 zeigt auch:

Satz 6.1. Seien $P : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ eine Funktion, $j \in \mathbb{N}$, $n \in \mathbb{N}$ und

$$S = \sum_{m=1}^{n} e(P(m)).$$

Dann gibt's für alle $(h_1, \dots, h_j) \in [1-n, n-1]^j$ ein Intervall $I(h_1, \dots, h_j) \subseteq [n]$ mit

$$|S|^{2^j} \leq (2n)^{2^j - j - 1} \sum_{|h_1| < n} \cdots \sum_{|h_j| < n} \sum_{m \in I(h_1, \dots, h_j)} e(P_{h_1, \dots, h_j}(m)).$$

Beweis. Induktion nach j.

$j = 1$: $$|S|^2 = \sum_{m'=1}^{n} e(P(m')) \cdot \sum_{m=1}^{n} e(-P(m))$$

$$= \sum_{1 \leq m, m' \leq n} e\big(P(m') - P(m)\big) \qquad m' = m + h$$

$$= \sum_{|h| < n} \sum_{m \in I(h)} e(P_h(m)),$$

wobei $\quad I(h) = \{ m \in [n] : \ m+h \in [n] \}$.

$j \to j+1$ | Es gelte

$$|S|^{2^j} \leq (2n)^{2^j - j - 1} \sum_{|h_1|<n} \cdots \sum_{|h_j|<n} \sum_{m \in I(h_1,\dots,h_j)} e(P_{h_1 \dots h_j}(m)).$$

$$= (2n)^{2^j - j - 1} \sum_{|h_1|<n} \cdots \sum_{|h_j|<n} A(h_1, \dots, h_j),$$

wobei $\quad A(h_1, \dots, h_j) = \sum_{m \in I(h_1,\dots,h_j)} e(P_{h_1 \dots h_j}(m))$.

Nach CSU folgt

$$|S|^{2^{j+1}} \leq (2n)^{2(2^j - j - 1)} \cdot (2n)^j \sum_{|h_1|<n} \cdots \sum_{|h_j|<n} |A(h_1, \dots, h_j)|^2$$

Für alle $(h_1, \dots, h_j) \in [1-n, n-1]^j$ ist

$$|A(h_1, \dots, h_j)|^2 = \sum_{m, m' \in I(h_1, \dots, h_j)} e(P_{h_1, \dots, h_j}(m') - P_{h_1 \dots h_j}(m))$$

$\boxed{m' = m + h_{j+1}}$

$$= \sum_{|h_{j+1}|<n} \sum_{m \in I(h_1,\ldots,h_{j+1})} e(P_{h_1,\ldots,h_{j+1}}(m)),$$

wobei $I(h_1,\ldots,h_{j+1}) = \{m \in I(h_1,\ldots,h_j) : m + h_{j+1} \in I(h_1,\ldots,h_j)\}$

Insgesamt

$$|S|^{2^{j+1}} \leq (2n)^{2^{j+1}-j-2} \sum_{|h_1|<n} \cdots \sum_{|h_{j+1}|<n} \sum_{m \in I(h_1,\ldots,h_{j+1})} e(P_{h_1,\ldots,h_{j+1}}(m)).$$

$\square$

Satz 6.2. (Hua) Setze $F(\alpha) = \sum_{m=1}^{n} e(\alpha m^k)$.

Für alle $\varepsilon > 0$ und $j \in [k]$

$$\int_0^1 |F(\alpha)|^{2^j} d\alpha = O(n^{2^j - j + \varepsilon}).$$

Bemerkungen 6.3. (1) F ist 1-periodisch und $F(-\alpha) = \overline{F(\alpha)}$.

(2) Für alle $t \in \mathbb{N}$ ist

$$|F(\alpha)|^{2t} = F(\alpha)^t F(-\alpha)^t$$

$$= \sum_{1 \le m_1, \dots, m_{2t} \le n} e(\alpha(m_1^k + \dots + m_t^k - m_{t+1}^k - \dots - m_{2t}^k))$$

$$= \sum_{\ell \in \mathbb{Z}} r_t(\ell)\, e(\ell \alpha),$$

wobei
$$r_t(\ell) = |\{(m_1, \dots, m_{2t}) \in [n]^{2t} : \ell = m_1^k + \dots + m_t^k - m_{t+1}^k - \dots - m_{2t}^k\}|$$

Also
$$\int_0^1 |F(\alpha)|^{2t}\, d\alpha = r_t(0),$$

da ja
$$\int_0^1 e(\ell\alpha) = \begin{cases} 1 & \text{wenn } \ell = 0 \\ 0 & \text{wenn } \ell \in \mathbb{Z} \setminus \{0\}. \end{cases}$$

<u>Beweis von Satz 6.2.</u> Induktion nach j.

<u>$j=1$</u> Wir wissen $\int_0^1 |F(\alpha)|^2 d\alpha = r_1(0)$

$$= |\{(m_1, m_2) \in [n]^2 : m_1^k = m_2^k\}| = n$$

$j \to j+1$ Sei $j \in [k-1]$ und

$$\int_0^1 |F(\alpha)|^{2^j} \, d\alpha = O(n^{2^j - j + \varepsilon}).$$

Nach Bem 6.3(2) ist

$$|F(\alpha)|^{2^j} = \sum_{\ell \in \mathbb{Z}} r(\ell) \, e(\ell\alpha),$$

wobei $r(\ell) = r_{2^{j-1}}(\ell)$. Dabei

$$r(0) = O(n^{2^j - j + \varepsilon}) \quad \text{- - - - - - - - - -} \quad (6.1)$$

und

$$\sum_{\ell \in \mathbb{Z}} r(\ell) = |[n]^{2^j}| = n^{2^j} \quad \text{- - - - - -} \quad (6.2)$$

Nach Satz 6.1 ist

$$|F(\alpha)|^{2^j} \le (2n)^{2^j - j - 1} \sum_{|h_1| < n} \cdots \sum_{|h_j| < n} \sum_{m \in I(h_1, \dots, h_j)} e(\alpha P_{h_1, \dots, h_j}(m)),$$

wobei $P(x) = x^k$.

Dies schreiben wir als

$$|F(\alpha)|^{2^j} \leq (2n)^{2^j - j - 1} \sum_{\ell \in \mathbb{Z}} s(\ell)\, e(\ell\alpha),$$

wobei

$$s(\ell) = |\{(h_1, \dots, h_j, m) \in [1-n, n-1]^j \times [n] :$$
$$\ell = P_{h_1 \dots h_j}(m) \;\&\; m \in I(h_1 \dots h_j)\}|$$

Somit

$$|F(\alpha)|^{2^{j+1}} \leq (2n)^{2^j - j - 1} \sum_{\ell, \ell' \in \mathbb{Z}} r(\ell)\, s(\ell')\, e((\ell + \ell')\alpha).$$

und

$$\int_0^1 |F(\alpha)|^{2^{j+1}}\, d\alpha \leq (2n)^{2^j - j - 1} \sum_{\ell \in \mathbb{Z}} r(\ell)\, s(-\ell) \quad \dots\dots (6.3)$$

Für $|h_1|, \dots, |h_j| < n$, $m \in I(h_1 \dots h_j)$ ist $|P_{h_1 \dots h_j}(m)| \leq 2^j \cdot n^k$.

Also $s(\ell) = 0$ für alle ℓ mit $|\ell| > 2^j n^k$.

Da

$$P_{h_1}(x) = (x+h_1)^k - x^k = h_1 (k x^{k-1} + \dots)$$

$$P_{h_1 h_2}(x) = h_1 h_2 (k(k-1) x^{k-2} + \dots)$$

$$\vdots$$

$$P_{h_1 \dots h_j}(x) = h_1 \dots h_j (k(k-1) \cdot \dots \cdot (k+1-j) x^{k-j} + \dots)$$

und $j < k$ ist

$$s(\ell) \leq O(\tau_{j+1}(|\ell|)) = O(|\ell|^{\varepsilon/k})$$

für alle $\ell \neq 0$. Für $|\ell| \leq 2^j n^k$, $\ell \neq 0$ ist also

$$s(\ell) \leq O((2^j n^k)^{\varepsilon/k}) = O(n^\varepsilon).$$

Außerdem ist $s(0) = O(n^j)$.

Nach (6.3) ist also

$$\int_0^1 |F(\alpha)|^{2^{j+1}} d\alpha \leq (2n)^{2^j - j - 1} \Big[O(n^j) r(0) + \sum_{\ell \neq 0} r(\ell) O(n^\varepsilon) \Big]$$

8A

(6.1)
(6.2)

$$\leq (2n)^{2^j - j - 1} \left[O(n^j)\, O(n^{2^j - j + \varepsilon}) + n^{2^j} \cdot O(n^{\varepsilon}) \right]$$

$$= (2n)^{2^j - j - 1} \cdot O(n^{2^j + \varepsilon})$$

$$= O(n^{2^{j+1} - j - 1 + \varepsilon}) \qquad \square$$

§ 7. Die Kreismethode.

Seien $k \geq 2$, $s \geq 2^k + 1$ fest. Für hinreichend großes $N \in \mathbb{N}$ untersuchen wir

$$R(N) = \left| \{ (x_1, \ldots, x_s) \in \mathbb{N}^s : x_1^k + \ldots + x_s^k = N \} \right|$$

Setze

$$n = \lfloor N^{1/k} \rfloor$$

und definiere $F : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{C}$ durch

$$F(\alpha) = \sum_{m=1}^{n} e(\alpha m^k).$$

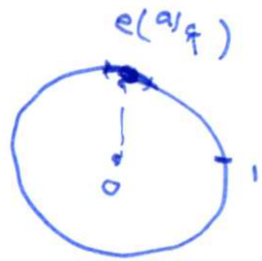
Lemma 7.1. Für alle $\xi \in \mathbb{R}$ ist

$$\int_{\xi}^{\xi+1} F(\alpha)^s e(-N\alpha)\, d\alpha = R(N).$$

Beweis. Da $F(\alpha)^s e(-N\alpha)$ 1-periodisch ist, ist OBdA $\xi = 0$. Benutze

$$F(\alpha)^s \, e(-N\alpha) = \sum_{1 \le m_1, \dots, m_s \le n} e\left(\alpha\left(m_1^k + \dots + m_s^k - N\right)\right). \qquad \square$$

Wähle $\nu < \frac{1}{5}$ und setze $Q = \lfloor n^\nu \rfloor$.



Für ganze Zahlen a, q mit

$$q \le Q, \quad 1 \le a \le q, \quad \mathrm{ggT}(a, q) = 1$$

setze

$$\mathfrak{M}(q, a) = \left[\frac{a}{q} - \frac{Q}{n^k}, \frac{a}{q} + \frac{Q}{n^k}\right] \qquad (\text{"Großer Bogen"})$$

<u>Fakt 7.2.</u> Die großen Bögen sind paarweise disjunkte Teilintervalle von $\left[\frac{Q}{n^k}, 1 + \frac{Q}{n^k}\right]$.

<u>Beweis.</u> Sei $q \le Q$, $1 \le a \le q$, $\mathrm{ggT}(a, q) = 1$.

Dann $$\frac{a}{q} - \frac{Q}{n^k} \ge \frac{1}{Q} - \frac{Q}{n^k} \ge \frac{Q}{n^k}, \text{ da } 2Q^2 \le n \le n^k,$$

und $$\frac{a}{q} + \frac{Q}{n^k} \le 1 + \frac{Q}{n^k}.$$

Dies zeigt $\mathfrak{M}(q,a) \subseteq \left[\frac{Q}{n^k}, 1+\frac{Q}{n^k}\right]$.

Sei nun $\mathfrak{M}(q',a')$ ein weiterer großer Bogen.

Wegen $\frac{a}{q} \neq \frac{a'}{q'}$ ist

$$\left|\frac{a}{q} - \frac{a'}{q'}\right| = \frac{|aq' - a'q|}{qq'} \geq \frac{1}{qq'} \geq \frac{1}{Q^2} \geq \frac{2Q}{n^k}.$$

also $\mathfrak{M}(q,a) \cap \mathfrak{M}(q',a') = \emptyset$. $\square$

Setze

$$\mathfrak{M} := \dot{\bigcup_{q \leq Q}} \; \dot{\bigcup_{\substack{1 \leq a \leq q \\ \mathrm{ggT}(a,q)=1}}} \mathfrak{M}(q,a)$$

und

$$\mathfrak{m} = \left[\frac{Q}{n^k}, 1+\frac{Q}{n^k}\right] \setminus \mathfrak{M} \quad (\text{"kleine Bögen"})$$