2nd Lecture

Summary of 1st Lecture

Goal: . $G(k) \leq 2^k + 1$.

Set $M_q(n,s) = \left| \{ (x_1, \dots, x_s) \in (\mathbb{Z}/q\mathbb{Z})^s : x_1^k + \dots + x_k^s = n \} \right|$

Theorem 2.10. If $s \geq 2^k + 1$ and p is prime, then

$$\liminf_{t \to \infty} \frac{M_{p^t}(n,s)}{p^{(s-1)t}} > 0.$$

<u>Bemerkungen 2.11.</u> (1) Wenn man statt $x \mapsto x^k$ eine zufällige Funktion $f: (\mathbb{Z}/q\mathbb{Z}) \to (\mathbb{Z}/q\mathbb{Z})$ betrachtet, dann hat jedes $(x_1, \dots, x_s) \in (\mathbb{Z}/q\mathbb{Z})^s$ die W'keit $\frac{1}{q}$, $f(x_1) + \dots + f(x_s) = n$ zu lösen. Daher

$$\mathbb{E}\,|\{(x_1, \dots, x_s) \in (\mathbb{Z}/q\mathbb{Z})^s : f(x_1) + \dots + f(x_s) = n\}| = q^{s-1}$$

Für eine zufällige Fkt. wäre obiger liminf also 1.

(2) Später zeigen wir, dass

$$T_p(n) = \lim_{t \to \infty} \frac{M_{p^t}(n,s)}{p^{(s-1)t}}$$

existiert und dass $\lim_{p \to \infty} T_p(n) = 1$.

§ 3. Das Waring'sche Problem für Zufallsmengen.

Fixiere $k \geq 2$. Setze

$$R_s(n) = |\{(x_1, \dots, x_s) \in \mathbb{N}_0^k : x_1^k + \dots + x_s^k = n\}|.$$

Ist n eine k^{te} Potenz, so sind $(\sqrt[k]{n} \pm 1)^k = n^k \pm k n^{1-\frac{1}{k}} + o(n^{1-\frac{1}{k}})$ die benachbarten k^{ten} Potenzen. Im Intervall $[n - o(n), n + o(n)]$ haben k^{ten} Potenzen also Abstand $k n^{1-\frac{1}{k}}$.

Betrachte Zufallsmenge $Z \subseteq \mathbb{N}$ mit

$$P(m \in Z) = \frac{1}{k m^{1-\frac{1}{k}}} \quad \text{für alle } m \in \mathbb{N},$$

wobei die Ereignisse $\{m \in Z : m \in \mathbb{N}\}$ unabh. sind.

Setze

$$J_s(n) = \mathbb{E}\,|\{(m_1, \dots, m_s) \in Z^s : m_1 + \dots + m_s = n\},$$

Mit anderen Worten

$$J_s(n) = \sum_{\substack{m_1+\dots+m_s=n \\ m_1,\dots,m_s \geq 1}} \frac{1}{k^s} (m_1 \cdot \ldots \cdot m_s)^{\frac{1}{k}-1}.$$

<u>Lemma 3.1.</u> Sind $\alpha \in (0,1)$ und $\beta \geq \alpha$ so gilt

$$\sum_{m=1}^{n-1} m^{\alpha-1} (n-m)^{\beta-1} = B(\alpha,\beta)\, n^{\alpha+\beta-1} + O_{\alpha,\beta}(n^{\beta-1}),$$

wobei

$$B(\alpha,\beta) = \int_0^1 t^{\alpha-1} (1-t)^{\beta-1}\, dt$$

die Euler'sche Beta-Funktion ist.

<u>Bem 3.2.</u> Das Integral konvergiert für $\alpha, \beta > 0$, denn

$$B(\alpha,\beta) \leq \int_0^{1/2} t^{\alpha-1}\, dt \cdot \max(1, 2^{1-\beta})$$

$$+ \int_{1/2}^1 (1-t)^{\beta-1}\, dt \max(1, 2^{1-\alpha})$$

$$= \frac{\max(1, 2^{1-\beta})}{\alpha\, 2^{\alpha}} + \frac{\max(1, 2^{1-\alpha})}{\beta \cdot 2^{\beta}} .$$

In der Funktionentheorie lernt man

$$B(\alpha,\beta) = \frac{\Gamma(\alpha)\,\Gamma(\beta)}{\Gamma(\alpha+\beta)} \quad \text{wobei} \quad \Gamma(\alpha) = \int_0^\infty t^{\alpha-1} e^{-t}\, dt$$

für $\alpha > 0$ konvergiert.

<u>Beweis von Lemma 3.1.</u> Setze $f(x) = x^{\alpha-1}(n-x)^{\beta-1}$ für $x \in (0,n)$.

Uns interessiert $\sum_{m=1}^{n-1} f(m)$ und es gilt

$$\int_0^n f(x)\, dx = \int_0^1 (nt)^{\alpha-1}(n(1-t))^{\beta-1}\, n\, dt \qquad x = nt$$

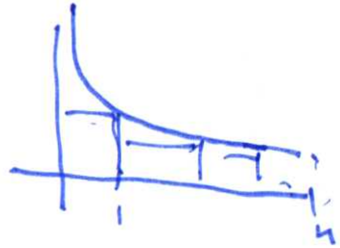
$$= n^{\alpha+\beta-1} \int_0^1 t^{\alpha-1}(1-t)^{\beta-1}\, dt$$

$$= B(\alpha,\beta)\, n^{\alpha+\beta-1} .$$

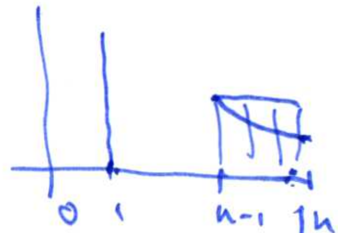
Für $\Delta = \int_0^n f(x)\,dx - \sum_{m=1}^{n-1} f(m)$ ist $|\Delta| = O_{\alpha,\beta}(n^{\beta-1})$ zu zeigen.

1. Fall $\beta \geq 1$

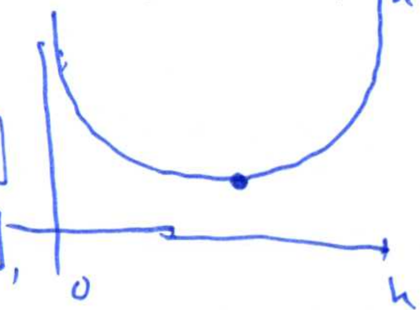
Da $x^{\alpha-1}$, $(n-x)^{\beta-1}$ monoton fallend sind, ist f auch monoton fallend. Also



$$0 \leq \Delta \leq \int_0^1 t^{\alpha-1}(n-t)^{\beta-1}\,dt$$
$$\leq n^{\beta-1}\int_0^1 t^{\alpha-1}\,dt$$
$$= \frac{n^{\beta-1}}{\alpha} = O_{\alpha,\beta}(n^{\beta-1}).$$



2. Fall $\beta < 1$



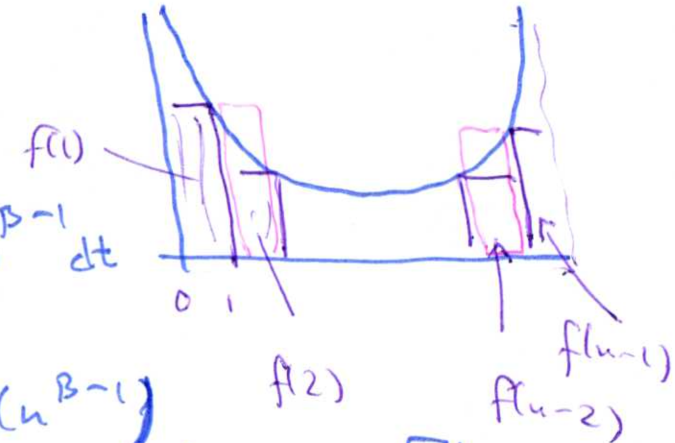
Nun $f'(x) = x^{\alpha-2}(n-x)^{\beta-2}\left[(\alpha-1)(n-x)-(\beta-1)x\right]$
$$= -x^{\alpha-2}(n-x)^{\beta-2}\left[(1-\alpha)n-(2-\alpha-\beta)x\right],$$

d.h. f hat bei $T = \frac{1-\alpha}{(1-\alpha)+(1-\beta)}\cdot n$ ein Minimum, ist auf $(0,T)$ fallend, auf (T,n) wachsend. Also

$$0 \le D \le \int_0^1 f(x)\,dx + \int_{n-1}^n f(x)\,dx$$

$$\le (n-1)^{\beta-1}\int_0^1 t^{\alpha-1}\,dt + (n-1)^{\alpha-1}\int_{n-1}^n (n-t)^{\beta-1}\,dt$$

$$= O\left(\frac{n^{\beta-1}}{\alpha} + \frac{n^{\alpha-1}}{\beta}\right) = O_{\alpha,\beta}(n^{\beta-1}).$$



$\square$

Sei $A_s = k^{-s}\prod_{i=1}^{k-1} B\left(\frac{1}{k},\frac{i}{k}\right)$ für alle $s \ge 2$.

Mit obigen Formel und $\Gamma(\alpha+1) = \alpha\Gamma(\alpha)$ kann man

$$A_s = \frac{\Gamma(1+\frac{1}{k})^s}{\Gamma(\frac{s}{k})}$$

zeigen. Für uns ist nur $A_s > 0$ wichtig.

Satz 3.3. Für alle $s \geq 2$ ist

$$J_s(n) = A_s \cdot n^{\frac{s}{k}-1} + O\left(n^{\frac{s-1}{k}-1}\right).$$

Beweis. Induktion nach s.

$s=2$| $$J_2(n) = \frac{1}{k^2} \sum_{m=1}^{n-1} m^{\frac{1}{k}-1} (n-m)^{\frac{1}{k}-1}$$

$$= \frac{1}{k^2} B\left(\frac{1}{k}, \frac{1}{k}\right) n^{\frac{2}{k}-1} + O\left(n^{\frac{1}{k}-1}\right).$$

$$= A_2\, n^{\frac{2}{k}-1} + O\left(n^{\frac{1}{k}-1}\right).$$

$s \to s+1$| Offenbar

$$J_{s+1}(n) = \frac{1}{k} \cdot \sum_{m=1}^{n-1} m^{\frac{1}{k}-1} J_s(n-m).$$

Schreibe $J_s(m) = A_s\, m^{\frac{s}{k}-1} + C_m\, m^{\frac{s-1}{k}-1}$, wobei

$|C_m| \leq C$ für alle m.

Also

$$J_{s+1}(n) = \frac{1}{k} \sum_{m=1}^{n-1} m^{\frac{1}{k}-1} \left(A_s (n-m)^{\frac{s}{k}-1} + C_{n-m} (n-m)^{\frac{s-1}{k}-1} \right)$$

Da

$$\sum_{m=1}^{n-1} m^{\frac{1}{k}-1} (n-m)^{\frac{s-1}{k}-1} = O\left(n^{\frac{s}{k}-1}\right)$$

folgt

$$J_{s+1}(n) = \frac{A_s}{k} \left(n^{\frac{s+1}{k}-1} \cdot B\left(\frac{1}{k}, \frac{s}{k}\right) + O\left(n^{\frac{s}{k}-1}\right) \right)$$

$$+ \; O\left(n^{\frac{s}{k}-1}\right)$$

$$= A_{s+1} \, n^{\frac{s+1}{k}-1} + O\left(n^{\frac{s}{k}-1}\right). \qquad \square$$

Man kann $J_s(n)$ fourieranalytisch beschreiben.

Setze $e(\alpha) = e^{2\pi i \alpha}$ für alle $\alpha \in \mathbb{R}$.

Nun

$$\int_0^1 e(n\alpha)\,d\alpha = \begin{cases} 1 & \text{wenn } n = 0 \\ 0 & \text{wenn } n \in \mathbb{Z}\setminus\{0\}, \end{cases}$$

wenn für $n \neq 0$ ist

$$\int_0^1 e(n\alpha)\,d\alpha = \int_0^1 (\cos 2\pi n\alpha + i \sin 2\pi n\alpha)\,d\alpha$$

$$= \left[\frac{\sin 2\pi n\alpha}{2\pi n} - i\,\frac{\cos 2\pi n\alpha}{2\pi n} \right]_0^1$$

$$= 0.$$

Definiere $v : \mathbb{R} \to \mathbb{C}$ durch

$$\boxed{v(\beta) = \sum_{m=1}^{n} \frac{1}{k}\, m^{\frac{1}{k}-1}\, e(m\beta).}$$

Nun ist

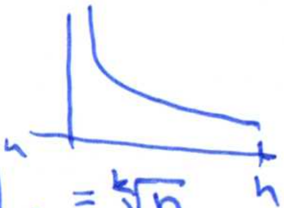
$$\int_0^1 \nu(\beta)^s \, e(-n\beta)\, d\beta$$

$$= \sum_{1 \le m_1, \dots, m_s \le n} \int_0^1 \frac{1}{k^s} (m_1 \cdot \ldots \cdot m_s)^{\frac{1}{k}-1} e((m_1 + \ldots + m_s - n)\beta)\, d\beta$$

$$= \sum_{m_1 + \ldots + m_s = n} \frac{1}{k^s} (m_1 \cdot \ldots \cdot m_s)^{\frac{1}{k}-1} = J_s(n).$$

$$\boxed{J_s(n) = \int_{-1/2}^{+1/2} \nu(\beta)^s \, e(-n\beta)\, d\beta}$$

<u>Lemma 3.4.</u> Für alle $\beta \in \mathbb{R}$ ist $|\nu(\beta)| \le \sqrt[k]{n}$. Außerdem gilt $|\nu(\beta)| \le 2|\beta|^{-1/k}$ für $|\beta| \le \frac{1}{2}$, $\beta \neq 0$.



<u>Beweis.</u> Nach Δ-Ungleichung gilt

$$|\nu(\beta)| \le \sum_{m=1}^{n} \frac{1}{k} m^{\frac{1}{k}-1} \le \int_0^n \frac{1}{k} x^{\frac{1}{k}-1}\, dx = \left[x^{\frac{1}{k}}\right]_0^n = \sqrt[k]{n}.$$

Sei nun $|\beta| \le \frac{1}{2}$, $\beta \neq 0$. Wenn $|\beta| \le \frac{1}{n}$ wissen wir bereits

$$|v(\beta)| \le \sqrt[k]{n} \le \left(\frac{1}{\beta}\right)^{1/k} \le 2\beta^{-1/k}.$$

Sei nun $\beta > \frac{1}{n}$. Setze $M = \left\lfloor \frac{1}{|\beta|} \right\rfloor$. Nun

$$\left| \sum_{m=1}^{M} \frac{1}{k} m^{\frac{1}{k}-1} e(m\beta) \right| \le \sum_{m=1}^{M} \frac{1}{k} m^{\frac{1}{k}-1} \le \sqrt[k]{M} \le |\beta|^{-1/k}.$$

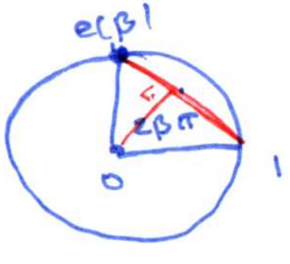
Es bleibt

$$\left| \sum_{m=M+1}^{n} \frac{1}{k} m^{\frac{1}{k}-1} e(m\beta) \right| \le |\beta|^{-1/k}$$

zu zeigen. Setze $S_m = \sum_{r=1}^{m} e(r\beta)$, $c_m = m^{\frac{1}{k}-1}$.

Wegen

$$|S_m| = \left| \frac{e(\beta) - e(m+1)\beta}{1 - e(\beta)} \right| \le \frac{2}{|1 - e(\beta)|} = \frac{2}{2|\sin \pi\beta|}$$



$\sin \pi x \ge 2x$ da Sinus konkav

$$\le \frac{1}{2|\beta|}$$

ist $$\left|\sum_{m=M+1}^{n} m^{\frac{1}{k}-1} e(m\beta)\right| = \left|\sum_{m=M+1}^{n} c_m (S_m - S_{m-1})\right|$$

$$= \left| S_n c_n - c_{M+1} S_M + \sum_{m=M+1}^{n-1} S_m (c_m - c_{m+1}) \right|$$

$$\le \frac{1}{2|\beta|}\left(c_n + c_{M+1} + \sum_{m=M+1}^{n-1} |c_m - c_{m+1}| \right)$$

$$= \frac{1}{2|\beta|}\left(c_n + c_{M+1} + c_{M+1} - c_n \right)$$

$$= \frac{c_{M+1}}{|\beta|} = |\beta|^{-1} (M+1)^{\frac{1}{k}-1} \le |\beta|^{-1} |\beta|^{1-\frac{1}{k}}$$

$$= |\beta|^{-1/k}.$$

Damit sind wir fertig.

$\square$