Wiederholung

Ziel (Roth) $\quad r_3(N) = O\left(\frac{N}{\log\log N}\right)$

Lemma 11.6. Sei $N \geq 20\delta^{-2}$ ungerade, $A \subseteq [N]$ AP_3-frei, $|A| = \delta N$. Wenn $|A \cap (\frac{N}{3}, \frac{2N}{3}]| \geq \frac{\delta N}{4}$, dann gibt's $r \in \mathbb{Z}/N\mathbb{Z}$ mit $r \neq 0$, $|\hat{A}(r)| \geq \frac{\delta^2 N}{5}$

Lemma 11.7. Sei $N \geq \left(\frac{16}{\alpha}\right)^4$, $f : \mathbb{Z}/N\mathbb{Z} \to \mathbb{C}$ mit $\|f\|_\infty \leq 1$ und $\varphi : \mathbb{Z}/N\mathbb{Z} \to \mathbb{Z}/N\mathbb{Z}$ linear.

Wenn $\sum_{x \in \mathbb{Z}/N\mathbb{Z}} |f(x)\, e(-\varphi(x)/N)| \geq \alpha N$, dann gibt's eine Partition $\{1, \dots, N\} = P_1 \,\dot\cup \dots \dot\cup\, P_m$ mit $\sum_{j=1}^{m} \left|\sum_{x \in P_j} f(x)\right| \geq \frac{\alpha}{2} N$, wobei die P_j arithm. Folgen der Länge $\lfloor \sqrt[4]{N} \rfloor$ oder $\lfloor \sqrt[4]{N} \rfloor - 1$ sind.

<u>Lemma 11.8.</u> Es seien $N \geq \left(\frac{16}{\alpha}\right)^4$ und $A \subseteq \mathbb{Z}/N\mathbb{Z}$ eine Menge mit $|A| = \delta N$. Wenn es ein $r \neq 0$ mit $|\hat{A}(r)| \geq \alpha N$ gibt, dann existiert eine arithm. Folge $P \subseteq \{1, 2, \dots, N\}$ mit $|P| \geq \frac{1}{2}\sqrt[4]{N}$ und $|A \cap P| \geq \left(\delta + \frac{\alpha}{4}\right)|P|$.

<u>Beweis.</u> Definiere $\varphi(x) = rx$ und $f = A - \delta$,

d.h.
$$f(x) = \begin{cases} 1-\delta & \text{wenn } x \in A \\ -\delta & \text{sonst} \end{cases}.$$

Da
$$\Big|\sum_x f(x)\, e(-\varphi(x)/N)\Big| = \Big|\sum_x A(x)\, e(-rx/N)\Big|$$
(da $\delta \sum_x e(-rx/N) = 0$)
$$= |\hat{A}(r)| \geq \alpha N$$

gibt's eine Partition $\{1, \dots, N\} = P_1 \cup \dots \cup P_m$ in arithm. Folgen mit $|P_j| \geq \frac{1}{2}\sqrt[4]{N}$ und

$$\sum_{j=1}^{m} \Big| \sum_{x \in P_j} f(x) \Big| \geq \frac{\alpha}{2} N .$$

Setze $\quad w_j = \sum_{x \in P_j} f(x) = |A \cap P_j| - \delta |P_j|$

für alle $j \in [m]$. Wegen $\sum_{j=1}^{m} w_j = |A| - \delta N = 0$

ist $\quad \sum_{j=1}^{m} |w_j| + w_j \geq \frac{\alpha}{2} N = \frac{\alpha}{2} \sum_{j=1}^{m} |P_j| .$

Folglich gibt's $j \in [m]$ mit

$$|w_j| + w_j \geq \frac{\alpha}{2} |P_j| .$$

Offenbar $w_j \geq 0$, also sogar

$$|w_j| \geq \frac{\alpha}{4} |P_j| ,$$

d.h. $\quad |A \cap P_j| \geq (\delta + \frac{\alpha}{4}) |P_j| .$ $\square$

Satz 11.9. Wenn $\delta \in (0,1]$ und $N \geq 2^{2^{20018}}$, dann enthält jede Menge $A \subseteq [N]$ mit $|A| = \delta N$ eine arithm. Folge der Länge 3.

Beweis. Andernfalls betrachte ein Gegenbeispiel (δ, N, A) mit minimalem N. Es sei $N' \leq N$ die größte Zahl mit $N' \equiv 3 \pmod{6}$ und $A' = A \cap [N']$. Setze $\delta' = \frac{|A'|}{N'}$.

Offenbar

$$\delta' \geq \frac{|A| - 5}{N'} = \frac{\delta N - 5}{N'} \geq \delta - \frac{5}{N'} > \delta - \frac{\delta^2}{100} > \frac{9}{10}\delta .$$

Setze $\quad R' = A' \cap [1, \frac{N'}{3}]$, $S' = A' \cap (\frac{N'}{3}, \frac{2N'}{3}]$,

$$T' = A' \cap (\frac{2N'}{3}, N].$$

1. Fall $\quad |S'| < \frac{\delta' N'}{4}$.

Wegen $\quad |R'| + |S'| + |T'| = |A'| = \delta' N'$

ist $\quad \max(|R'|, |T'|) \geq \frac{3}{8} \delta' N' > \frac{3}{8} \cdot \frac{9}{10} \delta N'$

$$= \frac{81}{80} \delta \cdot \frac{N'}{3} .$$

Also hat A in mind. einer der beiden Mengen R', T' mind. Dichte $\frac{81}{80} \delta$.

Daher gibt's Gegenbeispiel mit $\frac{N'}{3}, \frac{81}{80} \delta$ statt N, δ, Wid.

2. Fall $\quad |S'| \geq \frac{\delta' N'}{4}$.

Nach Lemma 11.6 gibt's $r \neq 0$ mit $|\hat{A}'(r)| \geq \frac{\delta'^2 N'}{5}$.

Lemma 11.8 liefert also eine arithm. Folge $P \subseteq [N']$

mit $\quad |P| \geq \frac{1}{2} \sqrt[4]{N'}$ und $|A' \cap P| \geq \left(\delta' + \frac{\delta'^2}{20}\right) N'$.

Setze $N'' = |P|$, $\quad \delta'' = \delta' + \frac{\delta'^2}{20}$.

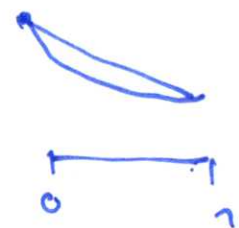
Da $N'' < N' \le N$ gibt es kein Gegenbeispiel für (N'', δ'') statt (N, δ), d.h.

$$N'' < 2^{2^{200/\delta''}}.$$

Dabei
$$\delta'' \ge \delta - \frac{\delta^2}{100} + \frac{1}{20}\cdot\left(\frac{9}{10}\delta\right)^2$$
$$= \delta - \frac{\delta^2}{100} + \frac{4}{100}\delta^2 = \delta + \frac{3}{100}\delta^2,$$

also
$$\frac{1}{\delta''} = \frac{1}{\delta}\cdot\frac{1}{1+\frac{3}{100}\delta}.$$

Da $\frac{1}{1+x} \le 1 - \frac{x}{2}$ für $x \in [0,1]$



folgt $\frac{1}{\delta''} \le \frac{1}{\delta}\left(1 - \frac{3}{200}\delta\right) = \frac{1}{\delta} - \frac{3}{200}$

und daher

$$N'' < 2^{2^{2018-3}} = 2^{\frac{1}{8} 2^{2018}} = \sqrt[8]{2^{2^{2018}}}$$

$$\leq \sqrt[8]{N} .$$

Andererseits ist $N'' \geq \frac{1}{2}\sqrt[4]{N'} \geq \frac{1}{2}\sqrt[4]{N-5}$.

Daher $\frac{1}{16}(N-5) \leq N''^{4} \leq \sqrt{N}$,

im Widerspruch zu $N > 1000$. $\square$

Diskussion. Man betrachte die erlaubten Schritte

$\boxed{\mathrm{I}}$ $(N, \delta) \longmapsto \left(\frac{N}{3}, \frac{81}{80}\delta\right)$

$\boxed{\mathrm{II}}$ $(N, \delta) \longmapsto \left(\frac{1}{2}\sqrt[4]{N}, \delta + \frac{3}{200}\delta^{2}\right)$

Wenn δ geg. ist, wie groß muß N sein, damit man auf Paare (N_*, δ_*) mit $\delta_* > 1$, $N_* > 20$ kommt?

Wenn man k mal Schritt II macht, muss

$N \approx 2^{2^{ck}}$ sein. Wie oft muss man

$\delta \longmapsto \delta + \frac{3}{200}\delta^2$ machen, um 1 zu erreichen?

Nach $\frac{1}{\delta}$ Schritten hat man mind. $\delta + \frac{3}{200}\delta = \left(1+\frac{3}{200}\right)\delta$

Nach $\frac{1}{\left(1+\frac{3}{200}\right)\delta}$ weiteren Schritten mind $\left(1+\frac{3}{200}\right)^2\delta$

usw.

Insgesamt sind nur $\frac{1}{\delta} + \frac{1}{\left(1+\frac{3}{200}\right)\delta} + \frac{1}{\left(1+\frac{3}{200}\right)^2\delta} + \ldots$

$= O\left(\frac{1}{\delta}\right)$ Schritte möglich.

§ 12. Der Satz von Heath-Brown und Szemerédi

<u>Satz 12.1.</u> Es gibt $c > 0$ mit $r_3(N) \leq O\left(\frac{N}{(\log N)^c}\right)$

<u>Idee:</u> Wähle in jedem Schritt mehrere große Fourier-koeffizienten.

<u>Lemma 12.2.</u> Für $12 \mid N$, $N \geq 2000\,\delta^{-2}$ sei $A \subseteq \{1, \dots, N\}$ eine AP_3-freie Menge mit $|A| \geq \delta N$. Wenn es keine arithm. Folge $P \subseteq [N]$ mit $|P| \geq \frac{\delta}{12} N$ und $|A \cap P| \geq \frac{16}{15}\delta |P|$ gibt, dann

$$\sum_{r \neq 0} |\hat{A}(r)|^3 \geq \frac{\delta^3 N^3}{2^{27}}.$$

Beweis. Wegen $|A \cap [1, \frac{5}{12}N]| \le \delta \frac{16}{15} \cdot \frac{5}{12} N = \frac{4}{9}\delta N$

und $|A \cap (\frac{7}{12}N, N]| \le \frac{4}{9}\delta N$ ist

$$|A \cap (\tfrac{5}{12}N, \tfrac{7}{12}N]| \ge \tfrac{1}{9}\delta N.$$

Es sei $I \subseteq \mathbb{Z}/N\mathbb{Z}$ ein bel. Intervall der Länge $\frac{N}{6}$.

Definiere $f: \mathbb{Z}/N\mathbb{Z} \to \mathbb{Z}/N\mathbb{Z}$ durch

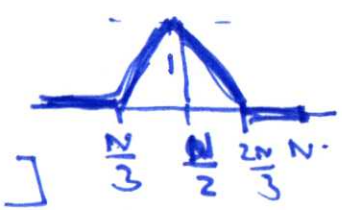
$$f(x) = \frac{6}{N}(I * -I)(x - \tfrac{N}{2})$$
$$= \frac{6}{N}\left|\{(a,b) \in I^2 : a - b = x - \tfrac{N}{2}\}\right|.$$

Offenbar

(1) $f(x) = 0$ für $x \in [1, \frac{N}{3}] \cup (\frac{2N}{3}, N]$

(2) $0 \le f(x) \le 1$ für alle x

(3) $f(x) \ge \frac{1}{2}$ für $x \in (\frac{5}{12}N, \frac{7}{12}N]$



Außerdem ist

$$\hat{f}(r) = \frac{6}{N} (-1)^r \, |\hat{I}(r)|^2 \quad \text{für alle} \quad r \in \mathbb{Z}/N\mathbb{Z},$$

denn:

$$\hat{f}(r) = \sum_x f(x)\, e(-xr/N)$$

$$= \frac{6}{N} \sum_{a \in I} \sum_{b \in I} e\left(-\left(a-b+\frac{N}{2}\right) r/N\right)$$

$$= \frac{6}{N} e(-r/2) \sum_{a \in I} e(-ar/N) \sum_{b \in I} e(br/N)$$

$$= \frac{6}{N} (-1)^r \, \hat{I}(r) \cdot \overline{\hat{I}(r)}$$

$$= \frac{6}{N} (-1)^r \, |\hat{I}(r)|^2$$

Folglich

$$\sum_r |\hat{f}(r)| = \frac{6}{N} \sum_r |\hat{I}(r)|^2 = \frac{6}{N} \cdot N \cdot \underbrace{\sum |I(x)|^2}_{= N/6}.$$

d.h.

$$\sum_r |\hat{f}(r)| = N.$$

Setze $B(x) = A(x) f(x)$ für alle $x \in \mathbb{Z}/N\mathbb{Z}$.

Aus (1) und (2) folgt

$$\sum_{x+z=2y}\sum\sum A(x)\, B(y)\, B(z) \leq |A|,$$

wobei die Summe über alle Tripel $(x, y, z) \in (\mathbb{Z}/N\mathbb{Z})^3$ läuft, die $x+z=2y$ lösen.

Somit

$$|A|\, N = \sum_r \hat{A}(r)\, \hat{B}(-2r) \cdot \hat{B}(r)$$

$$\geq \hat{A}(0)\, \hat{B}(0)^2 - \sum_{r \neq 0} |\hat{A}(r)|\,|\hat{B}(-2r)|\,|\hat{B}(r)|.$$

Dabei $\hat{A}(0) = \delta N$ und $\hat{B}(0) = \sum_x B(x) \geq \frac{1}{2}\left|A \cap \left(\frac{5}{12}N, \frac{7}{12}N\right]\right|$

$\geq \frac{1}{2}\,\frac{\delta N}{9}$, also

$$\frac{\delta^3 N^3}{324} - \delta N^2 \leq \sum_{r \neq 0} |\hat{A}(r)|\,|\hat{B}(-2r)|\,|\hat{B}(r)|$$

$$\leq \Big(\sum_{r \neq 0} |\hat{A}(r)|^3 \Big)^{1/3} \cdot \cancel{\hat{B}(r} \Big(\sum_{r \neq 0} |\hat{B}(r)|^3 \Big)^{2/3}$$

Wegen $N \geq 2000\,\delta^{-2}$ ist die linke Seite mind. $\frac{\delta^3 N^3}{400}$.