10. Vorlesung

Wir schreiben

$$\varphi(h_i + xu) = a(h_i + xu)^2 + b(h_i + xu) + c$$
$$= ax^2u^2 + \varphi_i(x)$$

mit der linearen Funktion

$$\varphi_i(x) = (2ah_i u + bu)x + (ah_i^2 + bh_i + c).$$

Beachte $s^4 \leq (\frac{1}{2} r^{1/64})^4 = \frac{1}{16} r^{1/16} \leq v-1 \leq v_i$.

Nach Lemma 9.6 gibt's also eine Partition

$$R_i = S_1 \dot\cup \dots \dot\cup S_{\ell(i)}$$

mit $\operatorname{diam}(\varphi_i[S_j]) \leq N v_i^{-1/4}$, $|S_j| \in \{s, s-1\}$

für alle $j \in [\ell(i)]$. Daher

$$\operatorname{diam}(\varphi[S_j]) \leq N \left\| \frac{au^2}{N} \right\| \cdot v_i^2 + \operatorname{diam}(\varphi_i[S_j])$$
$$\leq N r^{\frac{1}{8} - \frac{7}{48}} + 2Nr^{-\frac{1}{64}} \leq 3Nr^{-\frac{1}{64}}$$

$\square$

§ 10. Geraden in $\mathbb{F}_3^n$

Eine arithm. Folge der Länge 3 in $\mathbb{F}_3^n$ ist eine Gerade im affinen Raum $\mathbb{F}_3^n$. Da

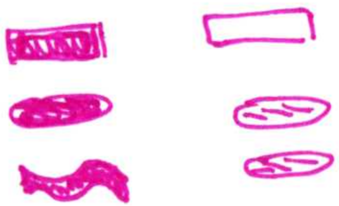
$$u + (u+v) + (u+2v) = 0$$

bilden drei paarweise verschiedene Punkte genau dann eine Gerade, wenn ihre Summe Null ist.

Uns interessiert

$$F(n) = \max\{ |A| : A \subseteq \mathbb{F}_3^n \text{ enthält keine Gerade} \}.$$

z.B. $F(1) = 2, \quad F(2) = 4, \quad F(3) = 9, \quad F(4) = 20$



Lange wusste man nur

$$2{,}2714^n \le F(n) \le \frac{2 \cdot 3^n}{n}$$

Heute weiß man $F(n) \le 2.7552^n$.

Dfn 10.1. (Tao) Es sei V ein Vektorraum über einem Körper F, $A \subseteq V$ endlich und $k \geq 2$.

(1) Eine Funktion $f: A^k \to F$ hat Rang 1, wenn f nicht die Nullfkt. ist und es $i \in [k]$, $g: A \to F$, $h: A^{k-1} \to F$ mit

$$f(a_1, \dots, a_k) = g(a_i) \cdot h(a_1, \dots, a_{i-1}, a_{i+1}, \dots, a_k)$$

für alle $a_1, \dots, a_k \in A$ gibt.

(2) Eine Funktion $f: A^k \to F$ hat Rang $r \in \mathbb{N}_0$, wenn r die kleinste Zahl ist, für die es r Funktionen $f_1, \dots, f_r$ vom Rang 1 mit $f = f_1 + \dots + f_r$ gibt.

Beispiele 10.2. (1) Allein die Nullfkt. hat Rang 0.

(2) Seien $b_1, \dots, b_k \in A$ beliebig. Die Funktion

$$f(a_1, \dots, a_k) = \delta_{a_1 b_1} \cdot \ldots \cdot \delta_{a_k b_k} = \begin{cases} 1 & \text{wenn } a_i = b_i \text{ für alle } i \\ 0 & \text{sonst} \end{cases}$$

hat Rang 1. Somit hat jede Fkt einen endlichen Rang.

<u>Lemma 10.3.</u> Seien A eine endl. Menge, F ein Körper und $W \subseteq \{f : f \text{ ist Fkt. von } A \text{ nach } F\}$ ein F-VR. Dann gibt's $h \in W$ mit $|\mathrm{supp}(h)| \geq \dim(W)$.

<u>Beweis.</u> Sei $B \subseteq A$ maximal derart, dass

$$W_B = \{ f|B : f \in W \}$$

alle Fkt. von B nach F enthält.

Wenn $|B| \geq \dim(W)$ sind wir fertig.

Angenommen $|B| < \dim(W)$. Die lin. Abb. $f \longmapsto f|B$ von W nach W_B ist nicht injektiv. Also gibt's $h \in W$ mit $h \neq 0$ und $h|B = 0$. Wähle $b \in A$ mit $h(b) \neq 0$. Nun widerspricht $B \cup \{b\}$ der maximalen Wahl von B. $\square$

Satz 10.4 (Tao) Es seien V ein Vektorraum über einem Körper F, $k \geq 2$, $A \subseteq V$ eine endl. Menge und $c : A \to F^{\times}$.

Dann hat die durch

$$f(x_1, \ldots, x_k) = \sum_{a \in A}{}' \, c(a) \, \delta_{a x_1} \cdot \ldots \cdot \delta_{a x_k}$$

definierte Fkt $f : A^k \to F$ den Rang $|A|$.

Beweis. Betrachte Gegenbeispiel mit minimalem k. Offenbar hat f höchstens Rang $|A|$. Hätte f kleineren Rang, dann könnte man

$$f(x_1, \ldots x_k) = \sum_{i=1}^{k} \sum_{\alpha \in I_i} g_{i\alpha}(x_i) \, h_{i\alpha}(x_1, \ldots, x_{i-1}, x_{i+1}, \ldots x_k)$$

mit Indexmengen $I_1, \ldots, I_k$, die $|I_1| + \ldots + |I_k| < |A|$ erfüllen, schreiben. Falls $k = 2$ sei $I_1 = \emptyset$.

Nun ist

$$W = \{ t : A \longrightarrow F : \text{Für alle } \alpha \in I_k \text{ ist } \sum_{a \in A} f_{k\alpha}(a)\, t(a) = 0 \}$$

ein F-VR mit $\dim(W) \geq |A| - |I_k|$.

Nach Lemma 10.3 gibt's $w \in W$ mit $|\mathrm{supp}(w)| \geq \dim(W)$

$$\geq |A| - |I_k| .$$

Definiere $f' : A^{k-1} \longrightarrow F$ durch

$$f'(x_1, \dots, x_{k-1}) = \sum_{x_k \in A} w(x_k) \cdot f(x_1, \dots, x_k) .$$

Einerseits ist

$$f'(x_1, \dots, x_{k-1}) = \sum_{x_k \in A} \sum_{a \in A} w(x_k)\, c(a)\, \delta_{a x_1} \cdot \ldots \cdot \delta_{a x_k}$$

$$= \sum_{a \in A} w(a)\, c(a)\, \delta_{a x_1} \cdot \ldots \cdot \delta_{a x_{k-1}} \quad \ldots . (1)$$

Andererseits

$$f'(x_1, \dots, x_{k-1}) = \sum_{x_k \in A} w(x_k) \sum_{i=1}^{k} \sum_{\alpha \in I_i} g_{i\alpha}(x_i)\, h_{i\alpha}(\hat{x}_i)$$

$$= \sum_{i=1}^{k-1} \sum_{\alpha \in I_i} \sum_{x_k \in A} g_{i\alpha}(x_i)\, h_{i\alpha}(\hat{x}_i)\, w(x_k) \quad \dots\ (2)$$

Fall 1 : $k = 2$

Nach (2) ist f' die Nullfunktion. Nach (1) ist also $w(x_1) \cdot c(x_1) = 0$ für alle $x_1 \in A$. Somit ist w die Nullfkt.

Nach Wahl von w ist also $0 \geq |A| - |I_2|$, d.h.

$|I_2| \geq |A|$ Wid.

Fall 2: $k \geq 3$

Nach (2) hat f' höchstens Rang $|I_1| + \dots + |I_{k-1}|$.

Nach (1) und Minimalität von k hat f' aber den Rang $|\mathrm{supp}(w)| \geq |A| - |I_k|$.

Folglich $|A| \leq |I_1| + \dots + |I_k|$. $\square$

Satz 10.5. (Ellenberg, Gijswijt) Wenn $A \subseteq \mathbb{F}_3^n$ keine Gerade enthält, dann

$$|A| \leq 3 \sum_{\substack{r+s+t=n \\ s+2t \leq \frac{2}{3}n}} \binom{n}{r\ s\ t}.$$

Beweis. Definiere $H : (\mathbb{F}_3^n)^3 \longrightarrow \mathbb{F}_3$ durch

$$H(x, y, z) = \prod_{i=1}^{n} \left[1 - (x_i + y_i + z_i)^2 \right],$$

wobei $x = (x_1, \ldots, x_n)$ u.s.w.

Für $s \in \mathbb{F}_3$ ist

$$1 - s^2 = \begin{cases} 1 & \text{wenn } s = 0 \\ 0 & \text{wenn } s \neq 0 \end{cases}$$

Also

$$H(x, y, z) = \begin{cases} 1 & \text{wenn } x + y + z = 0 \\ 0 & \text{sonst} \end{cases}$$

Für $a, b, c \in A$ ist also

$$H(a, b, c) = \begin{cases} 1 & \text{wenn } a = b = c \\ 0 & \text{sonst} \end{cases}$$

Nach Satz 10.4 hat $H | A^3$ den Rang $|A|$.

Andererseits kann man H durch Ausmultiplizieren als Summe von Monomen

$$c \, x_1^{\alpha_1} \cdots x_n^{\alpha_n} \, y_1^{\beta_1} \cdots y_n^{\beta_n} \, z_1^{\gamma_1} \cdots z_n^{\gamma_n}$$

mit

$$\alpha_1 + \dots + \alpha_n + \beta_1 + \dots + \gamma_1 + \dots \leq 2n \quad \dots (3)$$

$$0 \leq \alpha_1, \dots, \gamma_n \leq 2 \quad \dots (4)$$

Jedes dieser Monome (mit Koeffizient $\neq 0$) hat Rang 1. Folglich ist der Rang von H höchstens die Anzahl der ganzzahligen Lösungen von (3), (4).

Dies ist höchstens 3 mal die Anzahl der Lsg. von

$$\alpha_1 + \dots + \alpha_n \leq \frac{2n}{3}$$

$$0 \leq \alpha_i \leq 2 \quad \text{für } i = 1, \dots, n.$$

Für $r+s+t = n$, $s + 2t \leq \frac{2n}{3}$ gibt's $\binom{n}{r\,s\,t}$ Lösungen mit r Nullen, s Einsen, t Zweien. $\square$