Graphentheorie 1 – Übungsblatt 9
Sommersemester 2020
Christian Reiher, Kevin Sames, Bjarne Schülke, Mathias Schacht

---

41. Man zeige,
$$\frac{r-2}{2(r-1)}n^2 - \frac{r-1}{8} \leqslant \mathrm{ex}(n, K^r) \leqslant \frac{r-2}{2(r-1)}n^2$$
für alle ganzen Zahlen $r \geqslant 2$ und $n \geqslant 0$.

42. Das Ziel dieser Aufgabe besteht darin, einen weiteren Beweis der für alle ganzen Zahlen n und r mit $n \geqslant r \geqslant 2$ gültigen Abschätzung

   ($\star$) $\qquad \mathrm{ex}(n, K^r) \leqslant \frac{r-2}{2(r-1)}n^2$

   zu finden. Hierzu definiere man für jeden Graphen G mit n Ecken die reelle Zahl $\Psi(G)$ durch
$$\Psi(G) = \sum_{x \in V(G)} \frac{1}{n - d(x)}\,.$$

   (a) Es sei $|G| \geqslant 2$ und v eine Ecke von G, die zu allen anderen Ecken von G benachbart ist. Man zeige, dass $\Psi(G) = \Psi(G - v) + 1$.

   (b) Nun sei G ein Graph mit mindestens 2 Ecken, der jedoch keine Ecke besitzt, die zu allen anderen Ecken benachbart ist. Man zeige, dass
$$\sum_{v \in V(G)} \Psi(G - v) = |G| \cdot \Psi(G)\,.$$

   (c) Es sei $r \geqslant 2$ eine ganze Zahl. Man zeige, dass jeder Graph G mit $\Psi(G) > r - 1$ eine Clique der Ordnung r enthält.

   (d) Man folgere ($\star$) aus (c).

43. Es seien G ein Graph mit n Ecken und $C_4 \nsubseteq G$. Man beweise
$$\sum_{x \in V(G)} \binom{d(x)}{2} \leqslant \binom{n}{2}$$
und folgere $\mathrm{ex}(n, C_4) \leqslant n^{3/2} + n$.

In den folgenden beiden Aufgaben bezeichnet $R(r, s)$ für zwei natürliche Zahlen r und s die kleinste ganze Zahl n mit der folgenden Eigenschaft: In jeder rot/grün Färbung der Kanten des K^n gibt es einen roten K^r oder einen grünen K^s.

44. Man beweise $R(r, s) \leqslant R(r - 1, s) + R(r, s - 1)$ für alle ganzen Zahlen $r, s \geqslant 2$ und folgere
$$R(r, s) \leqslant \binom{r + s - 2}{r - 1}.$$

45. Man beweise $R(3, 3) = 6$, $R(3, 4) = 9$ und $R(4, 4) = 18$.

Diskussion am Freitag, den 3. Juli

Hinweise

41. In der Vorlesung haben wir uns

$$\mathrm{ex}(n, K^r) = \binom{q}{2}(m+1)^2 + \binom{r-1-q}{2}m^2 + q(r-1-q)m(m+1)$$

für $n = (r-1)m + q$ und $0 \leqslant q < r-1$ überlegt. Nun muss man etwas rechnen.

42. (a) Man vergleiche die Summanden in $\Psi(G)$ und $\Psi(G-v)+1$.

(b) Rechts steht eine Doppelsumme.

(c) Induktion nach r, bei festem r Induktion nach $|G|$. Im Induktionsschritt hilf entweder (a) oder (b).

(d) Die Funktion $z \longmapsto 1/z$ ist auf $\mathbb{R}^+$ konvex.

43. $C_4 = K_{2,2}$.

44. Betrachte für $n = R(r-1, s) + R(r, s-1)$ eine beliebige rot/grün-Färbung von $E(K_n)$. Eine beliebig gewählte Ecke x hat entweder viele rote oder viele grüne Nachbarn. Die Ungleichung mit dem Binomialkoeffizienten folgt durch Induktion.

45. Für die oberen Schranken: Betrachte die roten und grünen Grade der Ecken. Für die unteren Schranken: Identifiziere die Eckenmenge mit $\mathbb{Z}/n\mathbb{Z}$ und mache die Farbe einer Kante nur von der Differenz ihrer Ecken abhängig.