Graphentheorie 8 – Übungsblatt 8
Sommersemester 2020
Christian Reiher, Kevin Sames, Bjarne Schülke, Mathias Schacht

36. Es sei G ein dreiecksfreier Graph mit $V(G) = \{v_1, \dots, v_n\}$. Definiere einen Graphen G' durch
$$V(G') = \{v_1, \dots, v_n\} \cup \{x_1, \dots, x_n\} \cup \{z\}$$
und
$$E(G') = E(G) \cup \{v_i x_j \colon v_i v_j \in E(G)\} \cup \{x_i z \colon i \in [n]\}\,.$$
    (a) Man beweise, dass G' dreiecksfrei ist und die Eigenschaft $\chi(G') > \chi(G)$ hat.
    (b) Man folgere: Es gibt dreiecksfreie Graphen mit beliebig großer chromatischer Zahl.

37. Finde zu jedem $k \in \mathbb{N}$ eine Konstante $c_k > 0$, so dass jeder Graph G mit Unabhängigkeitszahl $\alpha(G) \leqslant k$ und hinreichend vielen Ecken einen Kreis der Länge mindestens $c_k\,|G|$ enthält.

38. Für einen Graphen G und $k \in \mathbb{N}$ bezeichne $P_G(k)$ die Anzahl der möglichen Eckenfärbungen $V(G) \longrightarrow \{1, \dots, k\}$ von G. Zeige, dass P_G ein Polynom in k vom Grad $n = |G|$ ist, bei dem k^n den Koeffizienten 1 hat und k^{n-1} den Koeffizienten $-\|G\|$. (Man nennt P_G das *chromatische Polynom* von G).

    (Tipp: Induktion nach $|G|$.)

39. Beweise $\mathrm{ch}(K_2^r) = r$. Zur Erinnerung: Ein K_2^r ist ein vollständig multipartiter Graph mit r Eckenklassen der Größe 2.

    (Tipp: Induktion nach r.)

40. Man beweise, dass jeder gerichtete Graph ohne gerichtete Kreise ungerader Länge einen Kern besitzt.

Diskussion am Freitag, den 26. Juni

Hinweise

41. (a) Betrachte eine Eckenfärbung $f\colon V(G') \longrightarrow [k+1]$ mit $f(z) = k+1$. Wie kann man eine Eckenfärbung $h\colon V(G) \longrightarrow [k]$ konstruieren? (b) Induktion.

42. Am Anfang der Vorlesung haben wir gezeigt, dass jeder Graph mit $\delta(G) \geqslant 2$ einen Kreis der Länge $\geqslant \delta(G) + 1$ enthält.

43. Zum Induktionsschritt vergleiche die Größen $P_G(k)$, $P_{G-e}(k)$ und $P_{G/e}(k)$.

44. Damit der Induktionsschritt glatt durchgeht, sollte es möglich sein, ein Paar Ecken und nur eine Farbe aus den Listen der anderen Ecken zu löschen. Was können wir über die Listen sagen, wenn das unmöglich ist? Diese Information allein wird es uns ermöglichen, den Graphen zu färben, ohne ihn auch nur noch einmal anzuschauen.

45. Eine Menge S von Ecken eines gerichteten Graphen D sei ein *Schwamm*, wenn D für jede Ecke $v \in D - S$ einen gerichteten Weg von v nach S enthält. Gibt es zusätzlich in D keinen gerichteten Weg zwischen zwei Ecken von S, so heiße S ein *Schwämmchen*. Zeige zunächst, dass jeder Schwamm ein Schwämmchen enthält. Definiere dann induktiv eine Partition von $V(D)$ in „Schichten" $S_0, \ldots, S_n$, so dass S_i für gerade i ein geeignetes Schwämmchen in $D_i := D - (S_0 \cup \cdots \cup S_{i-1})$ ist und für ungerade i aus den Ecken von D_i besteht, die eine Kante nach S_{i-1} schicken. Zeige, dass die geraden Schichten zusammen einen Kern von D bilden, wenn D keinen gerichteten Kreis ungerader Länge enthält.