Graphentheorie 1 – Übungsblatt 4
Sommersemester 2020

Christian Reiher, Kevin Sames, Bjarne Schülke, Mathias Schacht

---

Hinweis: Auf diesem Übungsblatt sind die letzten beiden Aufgaben etwas schwieriger als die ersten drei.

16. Finde einen kubischen (d.h. 3-regulären) Graphen ohne 1-Faktor.

17. Es seien m, n positive ganze Zahlen und $\mathcal{A} = \{A_1, \ldots, A_m\}$, $\mathcal{B} = \{B_1, \ldots, B_m\}$ zwei Partitionen einer (mn)-elementigen Menge X mit $|A_i| = |B_i| = n$ für alle $i \in [m]$. Ein *gemeinsames Repräsentantensystem* von $\mathcal{A}$ und $\mathcal{B}$ ist eine Menge $T \subseteq X$ mit $|A_i \cap T| = |B_i \cap T| = 1$ für alle $i \in [m]$. Man beweise, dass ein solches gemeinsames Repräsentantensystem von $\mathcal{A}$ und $\mathcal{B}$ existiert.

18. Es sei A eine endliche Menge mit Teilmengen $A_1, \ldots, A_n$, und es seien $d_1, \ldots, d_n \in \mathbb{N}$. Man zeige, dass genau dann disjunkte Teilmengen $D_k \subseteq A_k$ mit $|D_k| = d_k$ für alle $k \leqslant n$ existieren, wenn
$$\Big|\bigcup_{i \in I} A_i\Big| \geqslant \sum_{i \in I} d_i$$
für jede Teilmenge $I \subseteq \{1, \ldots, n\}$ gilt.

19. Es seien $(P, \leqslant_1)$ und $(P, \leqslant_2)$ zwei partielle Ordnungen auf der gleichen Grundmenge P. Man beweise, dass es eine Menge $A \subseteq P$ mit den beiden folgenden Eigenschaften gibt.

    (a) Sind $x, y \in A$ verschieden, so gilt weder $x \leqslant_1 y$ noch $x \leqslant_2 y$.

    (b) Für jedes $x \in P$ gibt es ein $a \in A$ für das $x \leqslant_1 a$ oder $x \leqslant_2 a$ gilt.

    Außerdem überlege man sich, dass diese Aussage den Satz von Gale und Shapley (im Buch Satz 1.1.4) impliziert.

20. Es sei G ein bipartiter Graph mit Eckenpartition $\{A, B\}$. und $\delta(G) \geqslant 1$. Es gelte $d(a) \geqslant d(b)$ für jede Kante ab mit $a \in A$. Man zeige, dass G ein Matching von A nach B enthält.

Diskussion am Freitag den 22. Mai

Hinweise

16. Brücken.

17. Benutze den Heiratssatz.

18. Konstruiere einen bipartiten Graphen, in dem geeignet viele Kopien der Mengen A_i die eine Partitionsmenge bilden und A die andere Partitionsmenge ist. Definiere die Kanten des Graphen so, dass eine Anwendung des Heiratssatzes das gewünschte Ergebnis liefert.

19. Für die Implikation sei P die Kantenmenge des Graphen.

20. Intuitiv betrachtet verursachen die Kanten zwischen einer Menge $S \subseteq A$ und $N(S)$ höhere Grade in S als in $N(S)$ und verteilen sich daher in $N(S)$ auf mehr Ecken. Mache diesen Ansatz präzise durch Abschätzungen von $|S|$ und von $|N(S)|$ mittels durch diese Kanten indizierter Summen. Alternativ betrachte ein minimales die Heiratsbedingung verletzendes $S \subseteq A$ und zähle die Kanten zwischen S und $N(S)$ einmal von S und einmal von $N(S)$ aus.