Graphentheorie 1 – Übungsblatt 3
Sommersemester 2020
Christian Reiher, Kevin Sames, Bjarne Schülke, Mathias Schacht

---

Hinweis: Auf diesem Übungsblatt sind die letzten beiden Aufgaben etwas schwieriger als die ersten drei.

11. Man zeige, dass ein Graph genau dann bipartit ist, wenn jeder *induzierte* Kreis gerade Länge hat.

12. Man zeige, dass jeder 2-zusammenhängende Graph einen Kreis enthält.

13. Zeige, dass ein zusammenhängender Graph genau dann bipartit ist, wenn es keine zwei benachbarten Ecken gibt, die den gleichen Abstand von einer dritten Ecke haben.

14. Es seien k eine positive ganze Zahl und G ein Graph mit $\delta(G) \geqslant 2k$. Ferner sei H ein minimaler Untergraph von G mit den Eigenschaft $\|H\| > k(|H|-1) > 0$. Man beweise, dass $\lambda(H) \geqslant k+1$.

15. Es sei $n \geqslant 4$ eine ganze Zahl. Ein Einsiedler spielt das folgende Spiel: Er startet mit dem vollständigen Graphen K^n. In jedem *Zug* wählt er im gerade vorhandenen Graphen einen C^4 aus und löscht eine Kante desselben. Er zieht so lange, bis ein C^4-freier Graph zurückbleibt. Sein Ziel besteht darin, das Ende des Spiels möglichst lange hinauszuzögern. Man bestimme die kleinste Anzahl von Kanten, die der am Schluss verbleibende Graph haben kann.

Diskussion am Freitag den 15. Mai

Hinweise

11. Wie gewinnt man aus einem nicht induzierten Kreis ungerader Länge einen kürzeren Kreis ungerader Länge?
12. Stellen Sie sich vor, der Graph wäre ein Wald.

    Alternativ reicht es zu zeigen, dass der Graph zwei kreuzungsfreie Wege zwischen zwei fest gewählten Ecken enthält. Dies gelingt besonders leicht bei geschickter Wahl der beiden Ecken.
13. Betrachte einen kürzesten ungeraden Kreis.
14. Man kann sich am Beweis des Satzes von Mader orientieren.
15. Muss der Restgraph zusammenhängend sein? Kann er bipartit sein?