Graphentheorie 1 – Übungsblatt 10
Sommersemester 2020
Christian Reiher, Kevin Sames, Bjarne Schülke, Mathias Schacht

---

Hinweis: Dies ist das letzte Übungsblatt. Die vierte Aufgabe ist etwas schwieriger als die anderen.

46. Man zeige, dass jeder eindeutig 3-kantenfärbbare kubische Graph einen Hamiltonkreis hat. Dabei soll „eindeutig“ heißen, dass alle 3-Kantenfärbungen die gleiche Kantenpartition induzieren.

47. Finde ein n-Tupel $(d_1, \dots, d_n)$ natürlicher Zahlen mit den folgenden drei Eigenschaften:

    (a) Es gibt mindestens einen Graphen G mit Gradsequenz $(d_1, \dots, d_n)$.

    (b) Jeder Graph mit Gradsequenz $(d_1, \dots, d_n)$ enthält einen Hamiltonkreis.

    (c) Es gibt einen positiven Index $i \leqslant n/2$ mit $d_i \leqslant i$ und $d_{n-i} < n - i$.

    Warum widerspricht das nicht dem Satz von Chvatál (also Satz 8.2.1 des Buches)?.

48. Führe den Beweis von Korollar 8.2.2 aus.

49. Es sei G ein Graph, in dem jede Ecke ungeraden Grad hat. Man beweise, dass jede Kante von G auf einer geraden Anzahl von Hamiltonkreisen liegt.

    (Tipp: Es sei $xy \in E(G)$ gegeben. Die Hamiltonkreise durch xy entsprechen den Hamiltonwegen in $G - xy$ von x nach y. Betrachte die Menge $\mathcal{H}$ *aller* in x beginnenden Hamiltonwege in $G - xy$ und zeige, dass eine gerade Anzahl davon in y endet. Definiere dazu einen geeigneten Graphen auf $\mathcal{H}$ und wende Proposition 0.2.1 auf $\mathcal{H}$ an.)

50. Es seien n eine positive ganze Zahl und $p = \frac{1}{n}$. Man zeige

    $$\mathbb{P}(G \text{ enthält ein Dreieck}) \leqslant \frac{1}{6}$$

    für $G \in \mathcal{G}(n, p)$.

Diskussion am Freitag, den 10. Juli

Hinweise

46. Betrachte die Vereinigung zweier Farbklassen.

47. Es gibt ein solches Tupel mit $d_1 = \ldots = d_n$.

48. Man benutze die Operation $G \longmapsto G * K^1$. Aufgabe 33 ist in gewisser Weise analog.

49. Wie kann man aus einem Hamiltonweg $P \in \mathcal{H}$ einen anderen gewinnen? Auf wieviele Weisen? Was hat das mit dem Grad in G der letzten Ecke von P zu tun?

50. Berechne den Erwartungswert für die Anzahl der Dreiecke in G.