Graphentheorie 1 – Übungsblatt 1

Sommersemester 2020

Christian Reiher, Kevin Sames, Bjarne Schülke, Mathias Schacht

1. Wieviele Kanten hat ein K^n ?
2. Es sei $d \in \mathbb{N}$ und $V = \{0, 1\}^d$, d.h. V sei die Menge aller d -Tupel mit Einträgen in $\{0, 1\}$. Der Graph auf V , bei dem zwei Ecken genau dann benachbart sind, wenn sie sich in genau einer Koordinate unterscheiden, heißt *d -dimensionaler Würfel*. Bestimme Durchschnittsgrad, Kantenzahl, Durchmesser, Taillenweite und Umfang dieses Graphen.

(Tip zum Umfang: Induktion nach d .)

3. Zeige, dass jeder Graph G die Ungleichung

$$\text{rad}(G) \leq \text{diam}(G) \leq 2 \text{rad}(G)$$

erfüllt.

4. Ein Graph G enthalte einen Kreis C und einen Weg P der Länge $\geq k$ zwischen zwei Ecken von C . Zeige, dass G einen Kreis der Länge $\geq \sqrt{k}$ enthält.
5. Zeige, dass ein zusammenhängender Graph mit Durchmesser k und Minimalgrad d mindestens $(k+1)(d+1)/3$ Ecken hat, aber nicht notwendig mehr als $1 + (k+2)d/2$.

Bemerkung. Sie dürfen die Aufgabe bereits dann als gelöst betrachten, wenn Sie eine untere und eine obere Schranke „in der Nähe von“ $kd/3$ bzw. $kd/2$ zeigen können.

Diskussion ausnahmsweise (wegen des Tages der Arbeit) am Donnerstag, den 30. April

Hinweise

1. Wieviele Kanten gehen von jeder Ecke aus?
2. Durchschnittsgrad und Kantenzahl: welche Eckengrade kommen vor? Durchmesser: wie kann man den Abstand zwischen Ecken im Graphen durch Betrachten der entsprechenden 0–1–Folgen bestimmen? Tailleweite: besitzt der Graph einen Kreis der Länge drei? Umfang: Zerlege den d -dimensionalen Würfel in zwei $(d - 1)$ -dimensionale Würfel und benutze Induktion.
3. Schätze die Abstände in G mittels einer zentralen Ecke ab.
4. Betrachte, wie P und C einander schneiden. Wo treten hier Kreise auf?
5. Betrachte zwei Ecken x, y maximalen Abstands. Setze $D_i = \{z \in V : d(x, z) = i\}$ und zeige, dass viele dieser Mengen groß sein müssen.