Musterlösung der ersten Klausur zur Vorlesung „Kurven und Flächen“ im WS 2010/11

Frank Reidegeld

8. Februar 2011

Aufgabe 1: Es sei $c : [0, \infty) \to \mathbb{R}^2$ die Kurve mit

$$c(t) := \begin{pmatrix} e^t \\ \sqrt{e^{2t} - 1} \end{pmatrix}$$

a) Berechnen Sie die Krümmung κ von c.

b) Für welches $t \in [0, \infty)$ nimmt $|\kappa(t)|$ sein Maximum an?

c) Berechnen Sie $\lim_{t\to\infty} \kappa(t)$.

Lösung:

a) $\kappa(t) = -\frac{1}{(2e^{2t}-1)^{3/2}}$.

b) Da $2e^{2t} - 1$ streng monoton steigend ist, nimmt $|\kappa(t)|$ sein Maximum bei $t = 0$ an.

c) $\lim_{t\to\infty} \kappa(t) = 0$.

Aufgabe 2: M sei die Menge

$$\{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 | x^2 + y^2 + 4z^2 = 1\}\,.$$

a) Definieren Sie eine offene Teilmenge U des $\mathbb{R}^2$ und eine Abbildung $f : U \to \mathbb{R}^3$, so dass f eine reguläre Fläche ist und das Bild $f(U)$ - möglicherweise mit Ausnahme endlich vieler Punkte $p_1, \ldots, p_n \in M$ - ganz M ist. Geben Sie $p_1, \ldots, p_n$, falls diese existieren, an und zeigen Sie, dass $f(U) \subseteq M$ ist.

b) Zeigen Sie durch eine Rechnung, dass f tatsächlich regulär ist.

c) Bestimmen Sie die erste Fundamentalform von f.

(Falls Sie a) nicht lösen können, dürfen Sie für die Aufgabenteile b) und c) die Abbildung

$$f(x,y) := \begin{pmatrix} \cosh x \sin y \\ \sinh x \\ \cosh x \cos y \end{pmatrix}$$

benutzen, welche eine andere reguläre Fläche beschreibt.)

Lösung:

a) Ein mögliches f ist

$$\begin{aligned} f : (-\tfrac{\pi}{2}, \tfrac{\pi}{2}) \times \mathbb{R} &\rightarrow \mathbb{R}^3 \\ f(x,y) &:= \begin{pmatrix} \cos x \cos y \\ \cos x \sin y \\ 2 \sin x \end{pmatrix} \end{aligned}$$

Idee: Verwende Kugelkoordinaten und verdoppele die z-Komponente.

$p_1 = (0, 0, \frac{1}{2})$, $p_2 = (0, 0, -\frac{1}{2})$. Es gilt:

$$f^1(x,y)^2 + f^2(x,y)^2 + 4f^3(x,y)^2 = 1.$$

b)

$$\frac{\partial f}{\partial x} \times \frac{\partial f}{\partial y} = \begin{pmatrix} -\frac{1}{2}\cos^2 x \cos y \\ -\frac{1}{2}\cos^2 x \sin y \\ -\sin x \cos x \end{pmatrix}$$

Alle drei Komponenten des Vektors können nur dann gleichzeitig gleich null sein, wenn $\cos x = 0$ ist. Solche Punkte sind aber nicht im Definitionsbereich von f enthalten. Also beschreibt f eine reguläre Fläche.

Alternatives f:

$$\frac{\partial f}{\partial x} \times \frac{\partial f}{\partial y} = \begin{pmatrix} -\cosh^2 x \sin y \\ -\cosh x \sinh y \\ -\cosh^2 x \cos y \end{pmatrix}$$

$\cosh x$ ist für alle $x \in \mathbb{R}$ positiv. Für alle $y \in \mathbb{R}$ ist entweder $\sin y$, $\sinh y$ oder $\cos y$ ungleich 0. Also beschreibt f eine reguläre Fläche.

c)

$$I = \begin{pmatrix} \sin^2 x + \frac{1}{4}\cos^2 x & 0 \\ 0 & \cos^2 x \end{pmatrix}$$

Alternatives f:

$$I = \begin{pmatrix} \sinh^2 x + \cosh^2 x & 0 \\ 0 & \cosh^2 x \end{pmatrix}$$

Aufgabe 3:

Es sei $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^3$ die Fläche mit

$$f(x,y) := \begin{pmatrix} x+y \\ x-y \\ x^2+y^2 \end{pmatrix}$$

a) Bestimmen Sie die erste und zweite Fundamentalform sowie die Weingarten-Abbildung von f in Abhängigkeit von $(x,y) \in \mathbb{R}^2$.

b) Es sei V eine offene Teilmenge des $\mathbb{R}^2$ und $\phi : V \to \mathbb{R}^2$ eine Umparametrisierung. Kann man ϕ so wählen, dass die Weingarten-Abbildung der umparametrisierten Fläche $f \circ \phi : V \to \mathbb{R}^3$ am Punkt $\phi^{-1}(0,0)$

$$\begin{pmatrix} 0 & \frac{1}{4} \\ \frac{1}{4} & 0 \end{pmatrix}$$

ist?

Lösung:

a)

$$I = \begin{pmatrix} 4x^2+2 & 4xy \\ 4xy & 4y^2+2 \end{pmatrix} \qquad n = \frac{1}{\sqrt{2x^2+2y^2+1}} \begin{pmatrix} x+y \\ x-y \\ -1 \end{pmatrix}$$

$$II = \frac{1}{\sqrt{2x^2+2y^2+1}} \begin{pmatrix} -2 & 0 \\ 0 & -2 \end{pmatrix} \quad L = \frac{1}{2(2x^2+2y^2+1)^{3/2}} \begin{pmatrix} -4y^2-2 & 4xy \\ 4xy & -4x^2-2 \end{pmatrix}$$

b) Am Punkt $(0,0)$ ist die Weingarten-Abbildung

$$L_{(0,0)} = \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} .$$

Die Weingarten-Abbildung $\widetilde{L}$ der umparametrisierten Fläche am Punkt $\phi^{-1}(0,0)$ ist

$$d\phi^{-1}_{\phi^{-1}(0,0)} \circ L_{(0,0)} \circ d\phi_{\phi^{-1}(0,0)}$$

Da L das Negative der Einheitsmatrix ist, muss auch

$$\widetilde{L}_{\phi^{-1}(0,0)} = \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}$$

sein. Also kann ein ϕ mit den geforderten Eigenschaften nicht existieren.

Alternative Lösung: Die Gauß-Krümmung von f am Punkt $(0,0)$ ist 1. Falls ein ϕ wie in der Aufgabe existierte, so wäre die Gauß-Krümmung der umparametrisierten Fläche am Punkt $\phi^{-1}(0,0)$

$$\det \begin{pmatrix} 0 & \frac{1}{4} \\ \frac{1}{4} & 0 \end{pmatrix} = -\frac{1}{16} .$$

Dies steht im Widerspruch zu der Tatsache, dass die Gauß-Krümmung invariant unter Umparametrisierungen ist.

Aufgabe 4: Es sei $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^3$ die Fläche mit

$$f(x,y) := \begin{pmatrix} \cos x + y^2 \\ \sin x \\ y \end{pmatrix}$$

Weiterhin sei $\gamma : \mathbb{R} \to \mathbb{R}^3$ die Kurve mit

$$\gamma(t) := \begin{pmatrix} \cos t \\ \sin t \\ 0 \end{pmatrix} .$$

a) Berechnen Sie die Christoffel-Symbole $\Gamma_{ij,k}$ von f.

b) Finden Sie eine Abbildung $c : \mathbb{R} \to \mathbb{R}^2$ mit $\gamma = f \circ c$.

c) Zeigen Sie, dass γ eine Geodäte in f ist.

Lösung:

a)

$$I = \begin{pmatrix} 1 & -2y\ \sin x \\ -2y\ \sin x & 4y^2+1 \end{pmatrix}$$

$$\begin{aligned}
\Gamma_{11,1} &= 0 \\
\Gamma_{11,2} &= -2y\ \cos x \\
\Gamma_{12,1} &= \Gamma_{21,1} = 0 \\
\Gamma_{12,2} &= \Gamma_{21,2} = 0 \\
\Gamma_{22,1} &= -2\ \sin x \\
\Gamma_{22,2} &= 4y
\end{aligned}$$

b) $c(t) = (t, 0)$

c) Zu zeigen ist: γ hat eine Parametrisierung, so dass $\gamma''(t) \perp T_{c(t)}f$ gilt. Der Tangentialraum $T_{c(t)}f$ wird von

$$\frac{\partial f}{\partial x}(c(t)) = \begin{pmatrix} -\sin t \\ \cos t \\ 0 \end{pmatrix} \qquad \text{und} \qquad \frac{\partial f}{\partial y}(c(t)) = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$$

aufgespannt.

$$\gamma''(t) = \begin{pmatrix} -\cos t \\ -\sin t \\ 0 \end{pmatrix}$$

steht senkrecht auf diesen beiden Vektoren. Also ist γ eine Geodäte.